APUNTES DE TRIGONOMETRÍA

La **trigonometría** es una rama de la matemática, cuyo significado etimológico es "la medición de los triángulos".

Deriva de los términos griegos τριγωνο *trigōno* triángulo y μετρον *metron* medida.

En términos generales, la trigonometría es el estudio de las razones trigonométricas: seno, coseno; tangente, cotangente; secante y cosecante.

Interviene directa o indirectamente en las demás ramas de la matemática y se aplica en todos aquellos ámbitos donde se requieren medidas de precisión. La trigonometría se aplica a otras ramas de la geometría, como es el caso del estudio de las esferas en la geometría del espacio.

Posee numerosas aplicaciones, entre las que se encuentran: las técnicas de triangulación, por ejemplo, son usadas en astronomía para medir distancias a estrellas próximas, en la medición de distancias entre puntos geográficos, y en sistemas de navegación por satélites.

TRIÁNGULOS

Es un polígono de tres lados, es decir, una porción de plano limitada por tres segmentos unidos, dos a dos, por sus extremos. Los tres segmentos que limitan el triángulo se denominan *lados*, y los extremos de los lados, *vértices*.

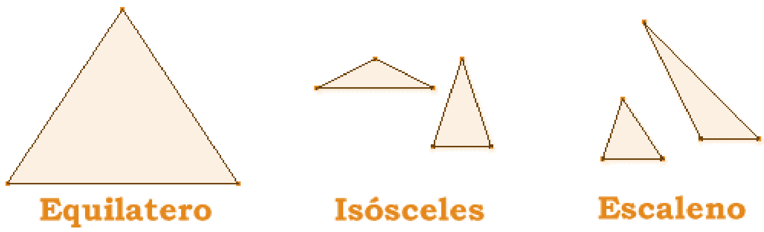
En un triángulo se consideran dos tipos de ángulos: *interior* (formado por dos lados) y *exterior* (formado por un lado y la prolongación de otro).

Consideraciones :

- En todo triángulo, la suma de los ángulos interiores es igual a dos rectos.
- En todo triángulo, un ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes.
- Dos triángulos son iguales cuando tienen iguales un lado y sus dos ángulos adyacentes.
- Dos triángulos son iguales cuando tienen dos lados iguales y el ángulo comprendidos.
- Dos triángulos son iguales cuando tienen los tres lados iguales.
- En todo triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo.
- Si un triángulo tiene dos lados iguales, sus ángulos opuestos son también iguales.
- *En todo triángulo, un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.*

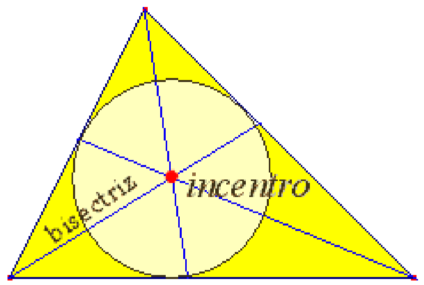
CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

Según sus lados
- **Equiláteros** (sus tres lados iguales)
- **Isósceles** (dos lados iguales y uno desigual)
- **Escaleno** (tres lados desiguales)

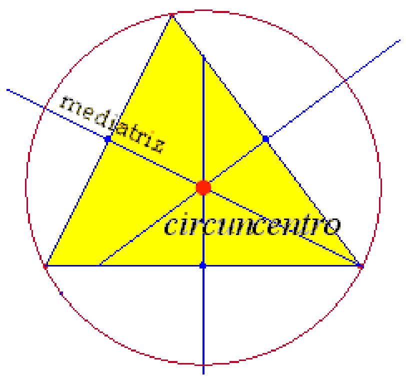


Según sus ángulos
- **Rectángulos** (un ángulo recto)
- **Acutángulos** (tres ángulos agudos)
- **Obtusángulos** (un ángulo obtuso)

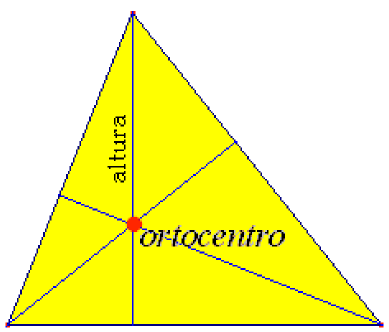
ELEMENTOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO



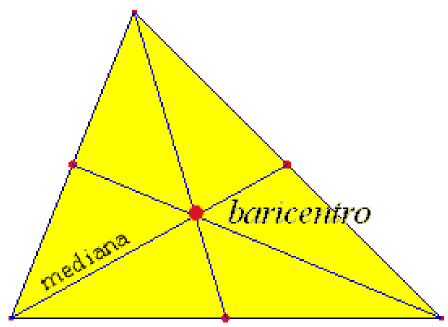
Bisectriz es la semirrecta que divide a un ángulo en dos partes iguales.
Incentro es el punto de intersección de las tres bisectrices de un triángulo. Es el centro de la circunferencia inscrita.



Mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al mismo en su punto medio.
Circuncentro es el punto de intersección de las tres mediatrices de un triángulo. Es el centro de la circunferencia circunscrita.



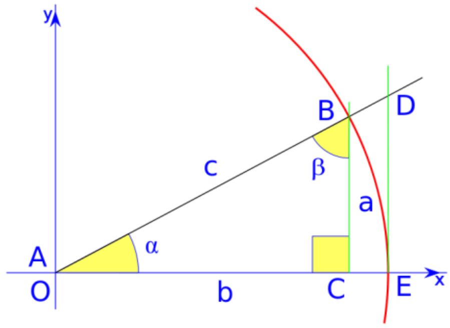
Altura es el segmento perpendicular comprendido entre un vértice y el lado opuesto.
Ortocentro es el punto de intersección de las tres alturas de un triángulo.



Mediana es el segmento comprendido entre un vértice y el punto medio del lado opuesto.
Baricentro es el punto de intersección de las tres medianas de un triángulo.

Razones trigonométricas

El triángulo ABC es un triángulo rectángulo en C; lo usaremos para definir las razones seno, coseno y tangente, del ángulo α, correspondiente al vértice **A**, situado en el centro de la circunferencia.



- El **seno** (abreviado como *sen*, o *sin* por llamarse "sĭnus" en latín) es la razón entre el cateto opuesto sobre la hipotenusa.

$$\sin\ \alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c}$$

- El **coseno** (abreviado como *cos*) es la razón entre el cateto adyacente sobre la hipotenusa,

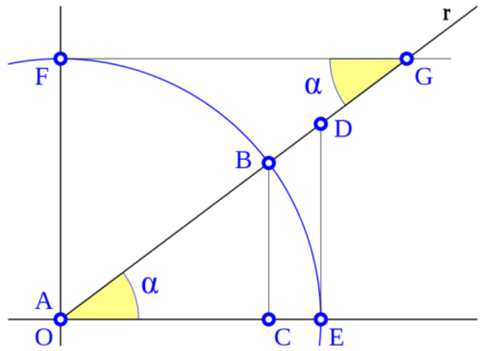
$$\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c}$$

- La **tangente** (abreviado como *tan* o *tg*)

es la razón entre el cateto opuesto sobre el cateto adyacente, $\tan\alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{a}{b}$

Razones trigonométricas inversas

Triángulo ABC proporcional con un ángulo inscrito en una circunferencia de centro A y radio 1



- La **Cosecante**: (abreviado como *csc* o *cosec*) es la razón inversa de seno, o también su inverso multiplicativo:

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\ \alpha} = \frac{c}{a}$$

En el esquema su representación geométrica es:

$$\csc\alpha = \overline{AG}$$

- La **Secante**: (abreviado como *sec*) es la razón

inversa de coseno, o también su inverso multiplicativo:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\ \alpha} = \frac{c}{b}$$

En el esquema su representación geométrica es: $\sec\alpha = \overline{AD}$

- La **Cotangente**: (abreviado como *cot* o *cta*) es

la razón inversa de la tangente, o también su inverso multiplicativo:

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{b}{a}$$

En el esquema su representación geométrica es: $\cot\alpha = \overline{GF}$

Normalmente se emplean las relaciones trigonométricas **seno, coseno y tangente**, y salvo que haya un interés específico en hablar de ellos o las expresiones matemáticas se simplifiquen mucho, los términos cosecante, secante y cotangente no suelen utilizarse.

Relaciones entre las razones trigonométricas

$$Sen\ \alpha = \frac{1}{Csc\ \alpha} \qquad \text{Csc}\ \alpha = \frac{1}{\text{Sen}\ \alpha} \qquad \text{Sec}\ \alpha = \frac{1}{\text{Cos}\ \alpha}$$

$$\text{Cos}\ \alpha = \frac{1}{\text{Sec}\ \alpha} \qquad \text{Tg}\ \alpha = \frac{1}{Ctg\ \alpha} \qquad \text{Ctg}\ \alpha = \frac{1}{\text{Tg}\ \alpha}$$

Identidades fundamentales:

$$Sen^2\ \alpha + Cos^2\ \alpha = 1 \qquad \text{Sen}^2\ \alpha = 1 - Cos^2\ \alpha \qquad \text{Cos}^2\ \alpha = 1 - Sen^2\ \alpha$$

$$Tg^2\ \alpha + 1 = Sec^2\ \alpha \qquad \text{Tg}^2\ \alpha = Sec^2\ \alpha - 1 \qquad \text{Tg}\ \alpha = \frac{\text{Sen}\ \alpha}{\text{Cos}\ \alpha} \qquad \text{Sen}\ \alpha = \text{Cos}\ \alpha\,.\text{Tg}\ \alpha$$

$$Ctg^2\ \alpha + 1 = Csc^2\ \alpha \qquad \text{Ctg}^2\ \alpha = Csc^2\ \alpha - 1 \qquad \text{Ctg}\ \alpha = \frac{\text{Cos}\ \alpha}{\text{Sen}\ \alpha} \qquad \text{Cos}\ \alpha = \text{Sen}\ \alpha\,.\text{Ctg}\ \alpha$$

Equivalencia entre las funciones trigonométricas

	Seno	**Coseno**	**Tangente**	**Cotangente**	**Secante**	**Cosecante**
$\sin\theta$	$\sin\theta$	$\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$	$\frac{1}{\csc\theta}$
$\cos\theta$	$\sqrt{1-\sin^2\theta}$	$\cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{1}{\sec\theta}$	$\frac{\sqrt{\csc^2\theta-1}}{\csc\theta}$
$\tan\theta$	$\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$	$\tan\theta$	$\frac{1}{\cot\theta}$	$\sqrt{sec^2\theta-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}$
$\cot\theta$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$	$\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{1}{\tan\theta}$	$\cot\theta$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\sqrt{\csc^2\theta-1}$
$\sec\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$	$\sec\theta$	$\frac{\csc\theta}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}$
$\csc\theta$	$\frac{1}{\sin\theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$	$\sqrt{1+\cot^2\theta}$	$\frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\csc\theta$

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS NOTABLES

Angulo	Sen	Cos	Tg	Sec	Csc	Ctg
30^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\sqrt{3}$
45^0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

SIGNOS DE LAS RAZONES TRIGONOMÈTRICAS EN LOS DIFERENTES CUADRANTES

Cuadrante	Sen	Cos	Tg	Ctg	Sec	Csc
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	+	-	-	+	-

REDUCCIÓN DE ÁNGULOS AL PRIMER CUADRANTE

Razones trigonométricas de un ángulo del primer cuadrante:

Sen (90º- α) = Cos α Cos (90º- α) = Sen α Tg (90º- α) = Ctg α

Csc (90º- α) = Sec α Sec (90º- α) = Csc α Ctg (90º- α) = Tg α

Razones trigonométricas de un ángulo del segundo cuadrante:

Sen α = Sen (180º - α) Cos α = -Cos (180º - α) Tg α = -Tg (180º - α)

Sec α = -Sec (180º - α) Csc α = Csc (180º - α) Ctg α = -Ctg (180º - α)

Razones trigonométricas de un ángulo del tercer cuadrante:

Sen α = - Sen (α - 180º) Cos α = - Cos (α - 180º) Tg α = Tg (α - 180º)

Sec α = - Sec (α - 180º) Csc α = - Csc (α - 180º) Ctg α = Ctg (α - 180º)

Razones trigonométricas de un ángulo del cuarto cuadrante:

Sen (360º- α) = -Sen α Cos (360º- α) = Cos α Tg (360º- α) = - Tg α

Sec (360º- α) = Sec α Csc (360º- α) = - Csc α Ctg (360º- α) = - Ctg α

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE UN ÁNGULO NEGATIVO

a) si el ángulo "α" es agudo

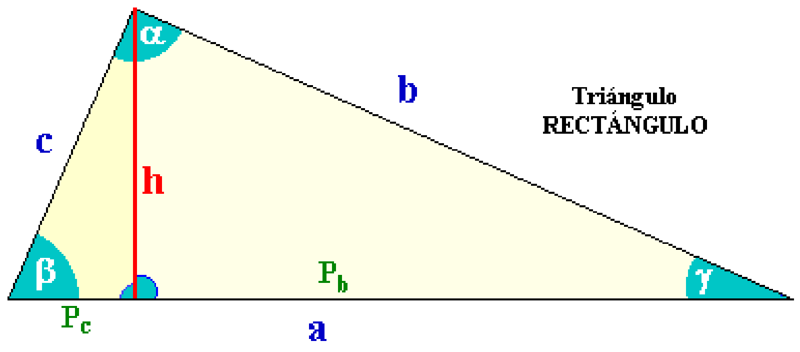
$$
\begin{aligned}
&Sen(-\alpha) = -Sen\alpha \\
&Cos(-\alpha) = Cos\alpha \\
&\mathrm{Tg}\ \ (-\alpha) = -Tg\alpha \\
&Ctg(-\alpha) = -Ctg\alpha \\
&\mathrm{Sec}\,(-\alpha) = Sec\alpha \\
&Csc(-\alpha) = -Csc\alpha
\end{aligned}
$$

b) Si el ángulo "α" es negativo no es agudo.
Si el ángulo "α" es negativo, y la medida en valor absoluto es mayor que 90º; se suma con 360º para convertirlo en positivo y luego se aplica alguna de las fórmulas anteriores, según el cuadrante donde se ubique el residuo de la división.

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS PARA ANGULOS MAYORES QUE 360º

Se divide la medida del ángulo "α" dado entre 360º y se toma como medida equivalente el residuo de la división y luego según el cuadrante donde se ubique dicho residuo, se aplica la fórmula correspondiente.

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS



Hipotenusa: a
Catetos: b y c
Proyección del cateto b: P_b
Proyección del cateto c: P_c
Altura: h
Ángulo recto: = 90º
Ángulos agudos:

RELACIONES MÉTRICAS

Teorema de PITAGORAS	$a^2 = b^2 + c^2$
Teorema de la ALTURA	$h^2 = P_b \cdot P_c$
	$h \cdot a = b \cdot c$
Teorema del CATETO	$b^2 = a \cdot P_b$
	$c^2 = a \cdot P_c$

RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{cat.opuesto}{hipotenusa} \qquad \text{sen}\,\beta = \frac{b}{a} \qquad \text{sen}\,\gamma = \frac{c}{a}$$

$$\cos\alpha = \frac{cat.adyacente}{hipotenusa} \qquad \cos\beta = \frac{c}{a} \qquad \cos\gamma = \frac{b}{a}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{cat.opuesto}{cat.adyacente} \qquad \text{tg}\,\beta = \frac{b}{c} \qquad \text{tg}\,\gamma = \frac{c}{b}$$

AREA

$$S = \frac{1}{2} base \times altura \Rightarrow S = \frac{1}{2} a \cdot h$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \text{sen}\,\beta \quad ; \quad S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \text{sen}\,\gamma$$

OTRAS RELACIONES

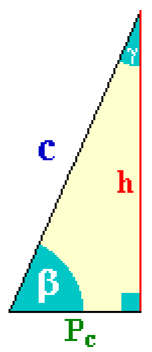
$$\alpha = 90^\circ \; ; \; \beta + \gamma = 90^\circ$$

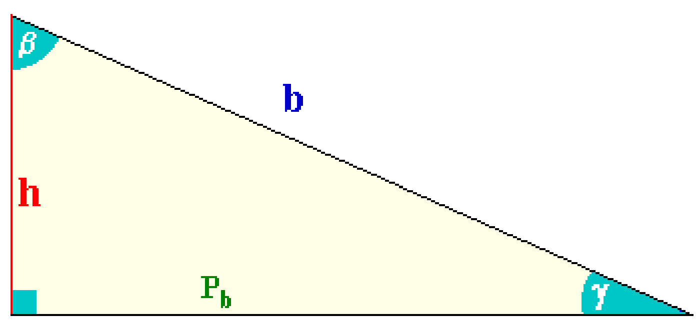
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$a = P_b + P_c$$

CASOS DE RESOLUCIÓN

1º HIPOTENUSA Y ÁNGULO
2º CATETO Y ÁNGULO
3º HIPOTENUSA Y CATETO
4º DOS CATETOS





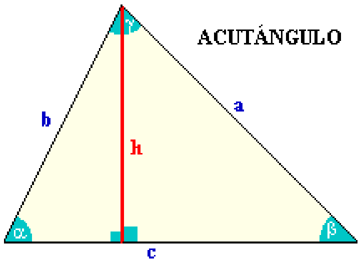
$$\text{sen}\,\beta = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \text{sen}\,\beta$$

$$\cos\beta = \frac{P_c}{c}$$

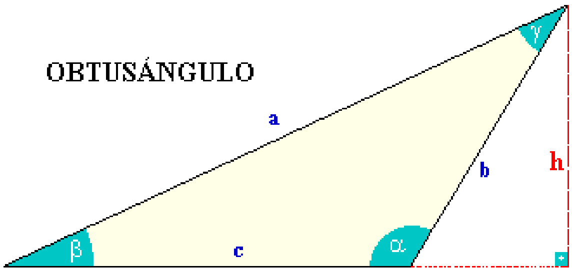
$$\text{sen}\,\gamma = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \text{sen}\,\gamma$$

$$\cos\gamma = \frac{P_b}{b}$$

TRIÁNGULOS NO Rectángulos



Tiene todos sus ángulos agudos



Tiene un ángulo obtuso

RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Teorema del SENO $$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R$$

Teorema del COSENO $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

Teorema de la TANGENTE $$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

2R = Diámetro de la circunferencia circunscrita

Relación entre diversas medidas de ángulos

$$\frac{a}{180^\circ} = \frac{b}{\pi_{rad}} = \frac{c}{200^g}$$

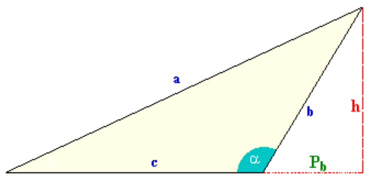
º grados sexagesimales

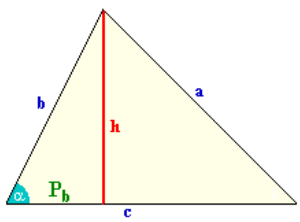
rad radianes

g grados centesimales

OTRAS RELACIONES en cualquier triángulo

Semiperímetro	$p = \frac{a+b+c}{2}$
Lado opuesto a un ángulo *obtuso*	$a^2 = b^2 + c^2 + 2bP_b$
Lado opuesto a un ángulo *agudo*	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bP_b$
Altura relativa al lado "a"	$h = \frac{2}{a}\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$
Fórmula de Herón	$S = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$
Circunferencia R→circunscrita, r→inscrita	$S = \frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot R}$; $S = p\cdot r$





RESOLVER UN TRIÁNGULO

- Resolver un triángulo cualquiera consiste en calcular todos sus elementos : *sus tres lados y sus tres ángulos*.
- Para resolver un triángulo debemos conocer, al menos, tres de sus elementos, uno de los cuales necesariamente debe ser un lado.
- En todo triángulo, un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

Teorema del seno:

$$\frac{a}{sen\alpha}=\frac{b}{sen\beta}=\frac{c}{sen\theta}$$

$$\begin{cases} \dfrac{a}{sen\alpha}=\dfrac{b}{sen\beta} \\ \dfrac{b}{sen\beta}=\dfrac{c}{sen\theta} \\ \dfrac{c}{sen\theta}=\dfrac{a}{sen\alpha} \end{cases}$$

Teorema del coseno:

$$a^2=b^2+c^2-2b\,.\,c\,.\,Cos\ \alpha$$
$$b^2=a^2+c^2-2a\,.\,c\,.\,Cos\ \beta$$
$$c^2=a^2+b^2-2a\,.\,b\,.\,Cos\ \theta$$

Área de un triangulo oblicuángulo:

1-.Cuando se conoce las longitudes de sus lados.

$$P=\frac{a+b+c}{2}$$

$$\mathrm{A}=\sqrt{\mathrm{p\,(p-a)\,.\,(p-b)\,.\,(p-c)}}$$

2-.Cuando se conoce la longitud de dos lados y la medida del ángulo comprendido entre ellos:

$$A=\frac{a\,.\,b\,.\,Sen\theta}{2}\qquad A=\frac{a\,.\,c\,.\,Sen\beta}{2}\qquad A=\frac{b\,.\,c\,.\,Sen\alpha}{2}$$

3-. Cuando se conoce la longitud de un lado y la medida de dos ángulos (los ángulos al extremo del lado conocido):

$$A=\frac{\mathrm{a}^2\,.\,Sen\beta\,.\,Sen\theta}{2\,\,.\,Sen\alpha}\qquad A=\frac{\mathrm{b}^2\,.\,Sen\alpha\,.\,Sen\theta}{2\,\,.\,Sen\beta}\qquad A=\frac{\mathrm{c}^2\,.\,Sen\alpha\,.\,Sen\beta}{2\,\,.\,Sen\theta}$$

Razones trigonométricas de la suma y diferencia de dos ángulos:

$$Sen(\alpha \pm \beta) = Sen\,\alpha\,.\,Cos\,\beta \pm Sen\,\beta\,.\,Cos\,\alpha$$

$$Cos(\alpha \pm \beta) = Cos\,\alpha\,.\,Cos\,\beta \mp Sen\,\beta\,.\,Sen\,\alpha$$

$$Tg(\alpha \pm \beta) = \frac{Tg\,\alpha \pm Tg\,\beta}{1 \mp Tg\,\alpha\,.\;g\,\beta}$$

Razones trigonométricas del ángulo doble:

Sen 2 α =2 Sen α . Cos α

$$Tg\,2\alpha = \frac{2Tg\,\alpha}{1 - Tg^2\alpha}$$

$$Cos\,2\alpha = 2Cos^2\,\alpha - 1 = 1 - 2Sen^2\,\alpha = Cos^2\,\alpha - Sen^2\,\alpha$$

Razones trigonométricas del ángulo mitad:

$$Sen\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - Cos\,\alpha}{2}} \qquad \mathrm{Cos}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + Cos\,\alpha}{2}}$$

$$\mathrm{Tag}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - Cos\,\alpha}{1 + Cos\,\alpha}} = \frac{\mathrm{Sen}\,\alpha}{1 + \mathrm{Cos}\,\alpha} = \frac{1 - \mathrm{Cos}\,\alpha}{\mathrm{Sen}\,\alpha}$$

FACTORIZACIÓN

Fórmulas de factorización de la suma y diferencia de Senos y Cosenos y Tangentes:

$$Sen\,\alpha + Sen\,\beta = 2\,Sen\,\frac{\alpha + \beta}{2}\,Cos\,\frac{\alpha - \beta}{2} \qquad Sen\,\alpha - Sen\,\beta = 2\,Cos\,\frac{\alpha + \beta}{2}\,Sen\,\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$Cos\,\alpha + Cos\,\beta = 2\,Cos\,\frac{\alpha + \beta}{2}\,Cos\,\frac{\alpha - \beta}{2} \qquad \mathrm{Cos}\,\alpha - \mathrm{Cos}\,\beta = -2\,Sen\,\frac{\alpha + \beta}{2}\,Sen\,\frac{\alpha - \beta}{2}$$

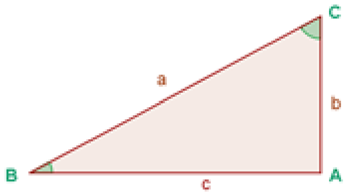
$$Tg\alpha + Tg\beta = \frac{Sen(\alpha + \beta)}{Cos\alpha.Cos\beta}$$

$$Tg\alpha - Tg\beta = \frac{Sen(\alpha - \beta)}{Cos\alpha.Cos\beta}$$

RESUMEN: Razones trigonométricas

Seno

$$\text{sen } B = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$



Coseno

$$\cos B = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

Tangente

$$\text{tg } B = \frac{\text{sen } B}{\cos B} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{b}{c}$$

Cosecante

$$\text{cosec } B = \frac{1}{\text{sen } B} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{a}{b}$$

Secante

$$\sec B = \frac{1}{\cos B} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{a}{c}$$

Cotangente

$$\text{cotg } B = \frac{1}{\text{tg } B} = \frac{\cos B}{\text{sen } B} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{b}$$

Identidades trígonométricas fundamentales

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sec^2 \alpha = 1 + \text{tg}^2 \alpha$$

$$\text{cosec}^2 \alpha = 1 + \text{cotg}^2 \alpha$$

Razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen}\, a \cos b + \cos a \text{ sen}\, b$$

$$\text{sen}(a-b) = \text{sen}\, a \cos b - \cos a \text{ sen}\, b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \ \cos b + \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$$

$$tg\,(a+b) = \frac{tg\,a + tg\,b}{1 - tg\,a \cdot tg\,b}$$

$$tg\,(a-b) = \frac{tg\,a - tg\,b}{1 + tg\,a \cdot tg\,b}$$

Razones trigonométricas del ángulo doble

$$\operatorname{sen} 2a = 2\ \operatorname{sen} a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$$

$$tg\ 2a = \frac{2\,tg\,a}{1 - tg^2 a}$$

Razones trigonométricas del ángulo mitad

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

$$tg\ \frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$$

Transformaciones de sumas en productos

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2\ \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2\ \cos \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2\ \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2\ \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

Transformaciones de productos en sumas

$$\operatorname{sen} A \cdot \cos B = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)\right]$$

$$\cos A \cdot \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(A+B) - \operatorname{sen}(A-B)\right]$$

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right]$$

$$\operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B = -\frac{1}{2}\left[\cos(A+B) - \cos(A-B)\right]$$

Teorema de los senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} a} = \frac{b}{\operatorname{sen} b} = \frac{c}{\operatorname{sen} c} = 2R$$

Teorema del coseno

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \ \cos A$$

Teorema de las tangentes

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\,\frac{A+B}{2}}{tg\,\frac{A-B}{2}}$$

Área de un triángulo

$$S = \frac{1}{2} b \bullet h$$

$$S = \frac{1}{2} b \cdot a \cdot \operatorname{sen} C$$

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

$$S = r \cdot p$$

Fórmula de Herón:

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$