<u>GUÍA N°1. Las Funciones.</u>

El estudio de las funciones no es solamente una preocupación contemporánea. La idea de función aparece implícita en variadas disciplinas a través del tiempo; se presenta en fórmulas, ecuaciones o en el planteamiento de problemas.

Algunos autores tienen discrepancias en quién fue el primero en introducir la palabra <u>función</u> en matemática, en lo que sí están de acuerdo es que la definición ha sufrido cambios según avanza el desarrollo matemático.

La idea de función esta ligada con las palabras de relación o dependencia, que desde la antigüedad se han utilizado en forma explícita o implícita para explicar algún descubrimiento logrado en forma empírica o práctica.

Se introducirá el concepto de <u>función</u> como correspondencia entre dos variables en la que a cada <u>variable independiente</u> le corresponde una única <u>variable dependiente</u>.

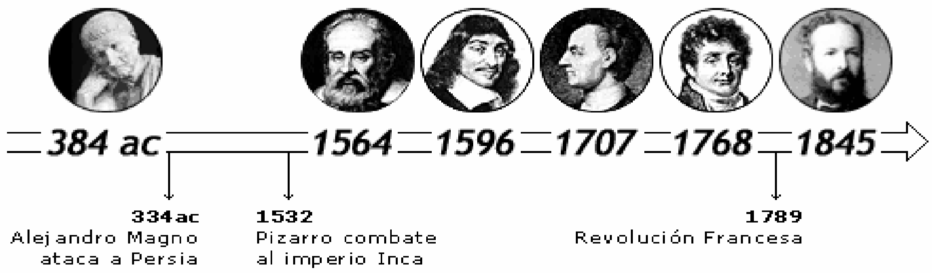
Además se entenderá por:

- **<u>dominio</u>** de la función como el conjunto de los valores posibles para la variable independiente.
- **<u>recorrido</u>** como el conjunto de los valores resultantes o imágenes.
- **<u>gráfico</u>** como el conjunto de puntos del plano que corresponden a pares (x,y) tales que f(x)= y.

El gráfico se construirá uniendo los pares (x, y) pertenecientes a la función modelo.

Ejemplos de funciones	Ejemplos que no son funciones
Consideremos a continuación unas algunas situaciones, los cuales podemos expresar mediante una función. • Sombra del árbol • El volumen de una caja • Cambio de moneda • La ebullición del agua	• Restricción vehicular • La circunferencia • Record mundiales • Prueba de la línea vertical

Elementos Históricos



Aristóteles (384ac-322ac). Filósofo y científico griego entregó grandes aportes a la ciencia

Galileo Galilei (1564-1642). Se especializó en medicina y estudió también matemáticas y ciencias físicas. Como profesor Galileo prosiguió su búsqueda de la verdad, analizando las teorías científicas de Aristóteles mediante la aplicación de las matemáticas y las observaciones experimentales.
La obra de Galileo, llevó a la formulación de las leyes de movimiento de Newton, más precisas, y al perfeccionamiento que de esas leyes hicieron más tarde otros científicos.

René Descartes (1596-1650). Filósofo y científico francés. Le debemos la ingeniosa idea de representar las funciones geométricamente, mediante un sistema de referencias formado por un punto de origen y dos ejes (el eje de abscisas y el de ordenadas), llamado en su honor, "plano cartesiano" dando así nacimiento a la "geometría analítica".

Euler Leonhard (1707-1783). Matemático suizo. Fue uno de los matemáticos más prolíferos de todos los tiempos, pues escribió tratados sobre todas las ramas de esta ciencia, publicando más de 500 libros y artículos, que repartidas durante toda su vida dan un promedio de 800 páginas anuales. Escribió "Introductio in analysin infinitorum" de Euler, la que podemos considerar como la piedra angular del nuevo análisis matemático. Este importante tratado, en dos volúmenes, fue la fuente en la que se basaron todos los matemáticos del siglo XVIII.

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830). Estableció la ecuación diferencial parcial que gobierna la difusión del calor solucionándolo por el uso de series infinitas de funciones trigonométricas. **En esto introduce la representación de una función como una serie de senos y cosenos**, ahora conocidas como las series de Fourier.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918). Matemático ruso-alemán. El creador de la teoría conjuntista y por su descubrimiento de los números transfinitos. También adelantó el estudio de las series trigonométricas, fue el primero en probar la no numerabilidad de los números reales, y hizo contribuciones significantes a la teoría de la dimensión.

A continuación se presentan tres ejemplos donde se desarrolla el modelo del concepto de función, para tres tipos distintos de funciones:

<u>Problema1.</u> ¿Cuántos saludos realiza?.

Pedro invitó a sus compañeros de curso a una fiesta en su casa, cada uno de sus compañeros llegó separado uno del otro, es decir, fueron llegando de uno en uno. Al momento de ingresar al comedor los invitados saludan a los compañeros que se encuentran en él. ¿Cuántos saludos debe realizar cada uno de los invitados que va ingresando al comedor si solo concurren a esta fiesta 25 compañeros?

Solución: Siendo x el número de compañeros, se obtiene: $\mathbf{f(x) = x - 1}$

> El **dominio** de la función $\mathbf{f(x) = x - 1}$, es el conjunto de los números naturales (N)
> El **recorrido** de la función $\mathbf{f(x) = x - 1}$, es el conjunto de los números naturales incluido el cero. (N U{0})

<u>Problema2</u>. El contagio de un resfrío.

Según investigaciones médicas un resfrío es contraído por 3 individuos al día siguiente a partir del contacto con uno que ya posea los virus. ¿Cuántas personas son contagiadas al 7° día?

Solución: Siendo x el número de días se obtiene: $\mathbf{f(x) = 3^x}$

> El **dominio** de la función $f(x) = 3^x$, es el conjunto de los números naturales (N)
> Dominio f(x) = N
>
> El **recorrido** de la función $f(x) = 3^x$, es el conjunto de las potencias de tres con exponente natural (N).

<u>Problema3</u>. Plantando pasto.

Un jardinero debe reponer el pasto en un terreno cuadrado cuya área total es de 100 m^2. Decide comprar cuadrados de lado 1 ¿Cuántos cuadrados de pasto necesita el jardinero para cubrir el terreno?

Solución: Siendo **x** el número de metros cuadrados del terreno, se obtiene: $\mathbf{f(x) = x^2}$

> El **dominio** de la función $\mathbf{f(x) = x^2}$, tomando en cuenta el contexto de la situación, es el conjunto de los números naturales (N)
>
> El **recorrido** de la función $\mathbf{f(x) = x^2}$, tomando en cuenta el contexto de la situación, es el conjunto de los cuadrados de números naturales (N).

Tipos de Funciones.

1) Función Lineal.

Ejemplos.

Situación 1: Consumo de pan

El consumo de harina per cápita en Chile es de 130 Kg./año siendo el consumo per cápita de pan de 93 Kg./año. Los productos tradicionales, de mayor venta, son la hallulla y la marraqueta, productos que dependiendo de la zona geográfica del país pueden constituir más del 90 % de la producción de una panadería. El kg de pan tiene un valor aproximado de $520, entonces ¿Cuál es el valor total que cancela una familia durante el año por concepto de consumo de pan?

a) Confeccionar una tabla de valores que muestre la situación.

b) Representar en una tabla de valores en un plano cartesiano y bosquejar la recta que contiene los puntos deducidos en la tabla de doble entrada.

c) Modelar la solución algebraica del problema.

d) Encontrar el dominio y recorrido de la función.

Situación 2: La tarifa de los microbuses

Uno de los medios de transportes de pasajeros más utilizados de la ciudad de Santiago son los buses urbanos (o microbuses). Los buses urbanos son aquellos que prestan servicios al interior de las ciudades o conglomerados, cuyos contornos urbanos se han unido. En la capital de Chile, Santiago, existen actualmente 324 servicios licitados, o dicho de otra forma, 324 líneas de recorrido que se relacionan con el Ministerio de Transportes y Telecomunicaciones, a través de un contrato de licitación de vías. El encargado de confirmar el cumplimiento de éste es el Departamento de Fiscalización. El Ministerio en conjunto con los empresarios fijan la tarifa para los usuarios de este tipo de transporte, si el pasaje en la actualidad tiene un valor de $310; se requiere determinar el dinero recaudado por el empresario el final del recorrido.

a) Confeccionar una tabla que muestre la situación.

b) Ubicar los valores obtenidos en un plano cartesiano y bosquejar la recta que contiene los puntos deducidos en la tabla.

c) Modelar la solución algebraica de la situación.

d) Encontrar el dominio y recorrido de la función.

Situación 3: Equivalencia de monedas

La mayoría de las personas que van a viajar a algún otro país realizan un cambio de moneda. El dólar es una moneda internacional que permite a los turistas realizar transacciones con mayor facilidad en el país que se encuentran de visita, por ejemplo, 1 dólar es igual a $706 chilenos. Es decir, la cantidad de dólares que se puede obtener depende de la cantidad de pesos que posea para realizar el cambio de moneda. En la dirección siguiente puede obtener equivalencias de diferentes monedas de acuerdo a un país de origen y obtener su equivalencia en la moneda del país donde desea viajar, luego podría ver cambios más significativos para los alumnos, por ejemplo de pesos a soles, de peso chileno a peso argentino, etc.

Para realizar un viaje a un país B, se tiene que realizar un cambio de moneda desde el país A. Si la relación de moneda es que por cada 200 monedas del país A, se pueden cambiar 100 monedas para el país B. ¿Cuántas monedas del país B obtengo si se dispone de 2500 monedas del país A?

a) Confeccionar una tabla de valores que simulen la situación.

b) Graficando los valores simulados del contexto de la situación.

c) ¿Podemos predecir cuántas monedas del país B obtengo si se dispone de 2500 monedas del país A?

Las **funciones lineales** de ecuaciones de la forma $y = mx$, m constante de proporcionalidad, contienen dos variables; sean x e y, las cuales son directamente proporcionales.

Los puntos (representados por pares ordenados), obtenidos de una tabla de doble entrada para la función $y = mx$, con $m \neq 0$, pertenecen a una recta que contiene el punto (0,0).

2) Función Afín.

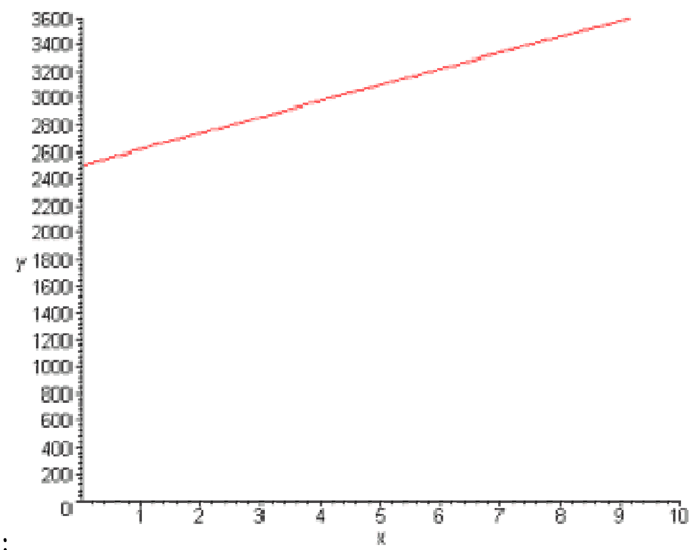
Situación 1: La facturación de los servicios básicos

Los consumos de algún tipo de servicio básico, como por ejemplo la luz, el agua, el gas natural o de cañería, el teléfono, etc. Presentan un cargo fijo ya se por emisión de boleta o por arriendo de algún tipo de medidor, con esto la situación presenta una constante la cual puede ser modelada por una función afín.

La factura de la electricidad incluye un monto fijo ($ 2.500, por ejemplo), que se cobra haya o no consumo, y una cantidad ($ 120, por ejemplo), por cada KW (Kilowatt), consumido. Así, la estructura de la cuenta de electricidad es parte con un valor al que se agrega el producto del consumo en KW por el valor del KW. El consumo de Kw mensual en un hogar sería el siguiente:

Nº de KW	Cobro mensual
0	2500
1	2500+120
2	2500+2*120
3	2500+3*120
4	2500+4*120
5	2500+5*120
6	2500+6*120
7	2500+7*120
8	2500+8*120
9	2500+9*120

Representando la situación del consumo en forma gráfica



obtenemos:

Donde:x: número de Kw mensualy:cobro mensual

Observaciones:

a. La recta que contiene los puntos obtenidos en la tabla de valores, intersecta al eje Y en el punto (0, 2500).

b. La recta forma un ángulo agudo con respecto al eje X.

c. La recta no pasa por el origen, punto (0, 0).

El modelo matemático que representa la solución algebraica a la situación del consumo de electricidad es: $\mathbf{y = 120x + 2500}$

Donde, **x:** consumo en Kw

y: valor a cancelar.

¿Cuál es el dominio de la situación?

¿Cuál es el recorrido de la situación?

El valor de m, que determina la orientación de la recta en la función lineal y afín, recibe el nombre de pendiente de la recta. Algebraicamente se puede escribir , en donde (x1, y1) y (x2, y2) son dos puntos pertenecientes a la recta.

Con esto, si se conocen dos puntos (x1, y1) y (x2, y2) que pertenecen a la recta que representa la situación a modelar se puede obtener la ecuación de la función afín que representa dicha situación. Algebraicamente se escribe como .

Conclusión

Las situaciones planteadas en estos ejercicios se pueden modelar con una ecuación de la forma $y = mx + n$, con m y n distintos de cero , en la cual y esta en función de x que denotamos y = f(x), además, de no ser rectas paralelas a uno de los ejes coordenados y que no pasa por el origen, reciben el nombre de **Función Afín**.

3) <u>Función Valor Absoluto</u>

Situación 1: ¿A qué distancia se encuentran?

Supongamos que un propietario de camiones vive en la Serena y desea saber a que distancia se encuentran dos de sus camiones que transitan por la carretera. Si un camión se encuentra en el Km. 769 y el otro camión, en el Km. 379 y La Serena está en el Km. 474. ¿a que distancia se encuentra cada camión de La Serena? ¿Cómo determinar la distancia en un punto cualquiera de uno de los camiones a La Serena?

a) Las distancias de los camiones. La distancia de un camión a La Serena, se determina a partir del kilómetro del camión en la carretera menos 474 que corresponde al kilómetro de la Serena, considerando siempre valores positivos, pues no existen distancias negativas.

La distancia del camión 1 = $|769 - 474| = 295$

La distancia del camión 2 = $|379 - 474| = 95$

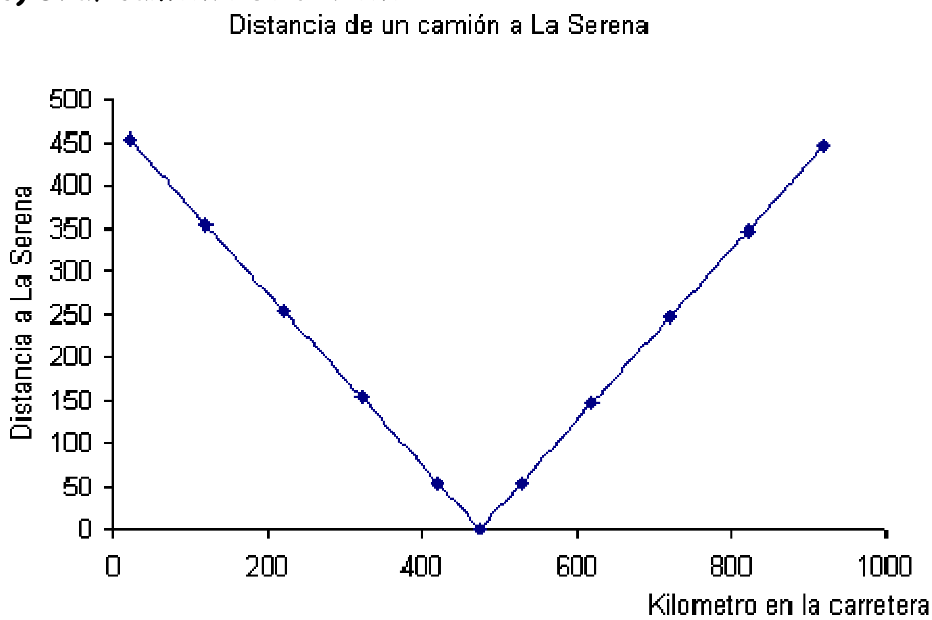
b) La distancia para un camión en cualquier kilómetro

X	Y
80	394
160	314
320	154
379	95
430	44
474	0
520	46
580	106
640	166
769	295
800	326
860	386

Donde: **x** es el kilómetro que se indica en la carretera

y es la distancia a que se encuentra el camión de La Serena.

c) Gráficamente se obtiene:



d) El modelo. La distancia a que se encuentra el camión de La Serena, la que se calcula restando el Kilómetro que reporta el chofer (X) del Kilómetro que a La Serena le corresponde en la autopista (474).

y = |x - 474|

¿Cuál es el dominio de la situación? ¿Cuál es el recorrido de la situación?

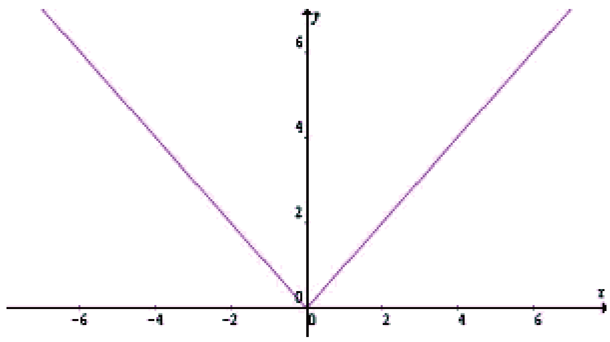
Definición: La **función VALOR ABSOLUTO** se define por $y = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

esto es equivalente a escribir $y = |x|$.

El dominio de la función que representa la situación es el conjunto de los números reales (R).

El recorrido de la función que representa la situación es el conjunto de los números reales positivos unión el cero ($R^+ \cup \{0\}$).

La representación gráfica de los datos obtenidos en la tabla de valores es:



x (cm)	y (cm)
-4	4
-3	3
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4

4) Función Parte Entera.

Otro modelo que surge de aplicar la función afín, sirve para representar y estudiar situaciones en las que los valores de la variable dependiente son "escalonados"

Por ejemplo:

- **Costo de un estacionamiento.** Al modelar lo que sucede en un estacionamiento para vehículos, cuya tarifa está en función del tiempo que permanece el vehículo estacionado. En algunos estacionamientos se lee el siguiente letrero: "$400 por cada media hora o fracción". Esto significa que el automovilista pagará $400 si su vehículo esta estacionado 10, 15 o 25 minutos, pero pagará $800 si está estacionado 31, 45 o 55 minutos.

- **¿Qué edad tienes?** Para decir la edad, una persona cuenta solo la cantidad de años que han pasado desde su fecha de nacimiento a la fecha actual, no los días o los meses. O sea, si una persona nació el 23 de Enero de 1985, y otra persona nació el 12 de Octubre de 1985, para el día 24 de Diciembre de 2001, ambas personas dirán que tienen 16 años.

- **El servicio de Metrotren.** El servicio de ferrocarriles del estado, llamado metrotren, recorre desde la estación Alameda (Santiago), hasta la estación de San Fernando. Dependiendo de la distancia que uno recorra, es el valor a cancelar. Supongamos que partimos de Santiago (estación

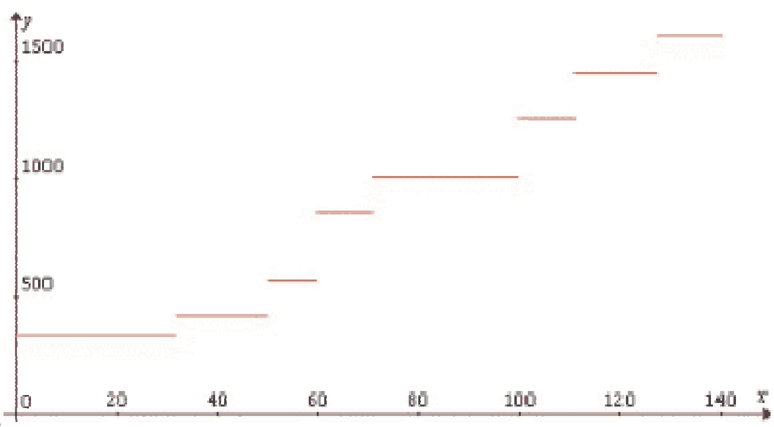
Alameda) con dirección hacia el sur, los valores del pasaje se muestra en la siguiente tabla.

ESTACION	VALOR DEL PASAJE
San Bernardo (Km.21)	$350
Maestranza (Km.22)	$350
Nos (Km.32)	$350
Buin (Km.46)	$450
Linderos (Km.50)	$450
Paine (Km.53)	$550
Hospital (Km. 58)	$550
San Francisco (Km.74)	$800
Graneros (Km. 82)	$1000
Rancagua (Km.87)	$1000
Requinoa (Km.101)	$1200
Rengo (Km.116)	$1400
Pelequen (Km.125)	$1400
San Fernando (Km.140)	$1600

Se podrían graficar estos datos, donde la variable **x** corresponde a la distancia (km.) y la variable **y** corresponde al valor del pasaje a cancelar.

Gráficamente se observa que

:



Definición: Para todo número real **x**, se puede encontrar un número entero **n**, tal que cumple con las siguientes propiedades:

El número x esté entre n y n+1 Si $n \leq x < n+1 \Rightarrow [x] = n$

En otras palabras, ***la parte entera de un número es el entero menor más cercano al número***

A la función $y(x) = [x]$, se la llama **Función parte entera**.

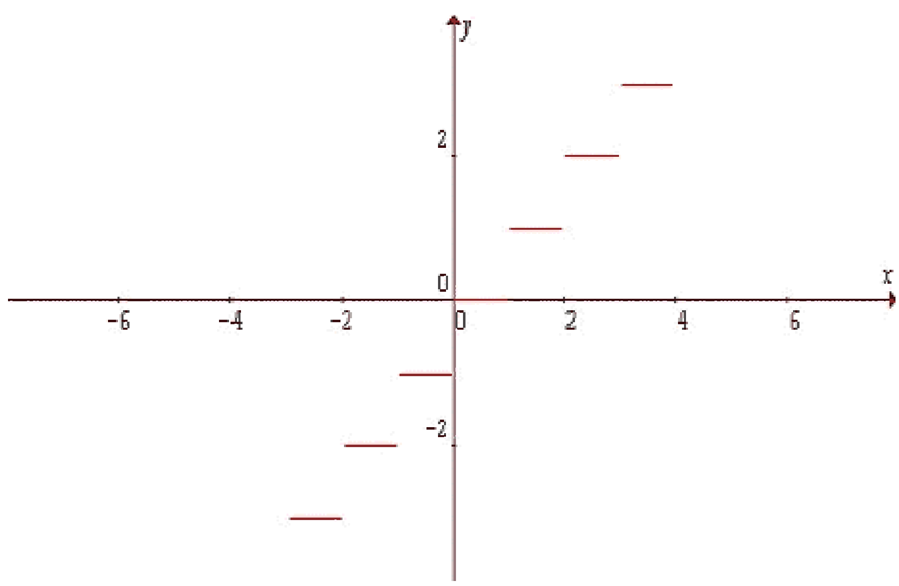
Gráfica de la función parte entera

Graficar la función y = [x], confeccionando una tabla de doble entrada para los valores de x entre -3 y 3.

Tabla de valores

X	y=[x]
3	3
2,5	2
2,1	2
1,8	1
1	1
0,6	0
0	0
-0,5	-1
-1,8	-2
-2,1	-3
-3	-3

Su representación gráfica es:



Dominio y recorrido

El dominio de la función parte entera, es el conjunto de los números reales (R).

El recorrido, es el conjunto de números enteros (Z).