IE DIVERSIFICADO DE CHIA
DEFINICION EJERCICIOS Y EJEMPLOS DE SUSCESIONES Y LIMITES

Chía,
Señores Estudiantes de grados UNDECIMOS, a continuación encontrarán una serie de definiciones ejemplos y ejercicios bajados de internet y los cuales se realizarán de acuerdo a lo que se indique en cada curso. Este documento es solo como guía y los ejercicios que deben realizar se los indicaran en el aula de clase cada uno de los docentes del área
Cordialmente
Docentes de Matemáticas

SUCESIONES.

Sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de números naturales y cuyo recorrido es un subconjunto de los números reales.

Una sucesión de números reales es una ley (función) que hace corresponder a cada número natural un número real.

$$\begin{array}{ccccccccc} \aleph & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & n & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ \Re & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \ldots & a_n & \ldots \end{array}$$

Se acostumbra representar la sucesión por sus imágenes :

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & , a_2 & , a_3 & , a_4 & , \ldots , a_n & , \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & n & \end{array}$$

Los números naturales 1,2,3,4,... n se llaman **índices**. Los números reales a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , . . . , a_n , . . . se llaman **términos**. Al término a_n se le llama **término general.**

Ejemplo	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5			a_n
Ejemplo 1	**1**	**3**	**5**	**7**	**9**			**2n-1**
Ejemplo 2	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**			**2n**
Ejemplo 3	**1**	**4**	**9**	**16**	**25**			n^2
Ejemplo 4	**1**	**-2**	**3**	**-4**	**5**			$(-1)^{n+1}n$

EJERCICIOS :
6. Escribe los primeros cinco términos de la sucesión

a) $\frac{1}{2n+1}$	**b)** $\frac{(-1)^n}{n}$	**c)** $\frac{1}{2n-1}$	**d)** n^n
e) $n^2 + (-1)^n n$	**f)** $\frac{n-1}{2n}$	**g)** $\frac{n}{n^2+n+1}$	**h)** $\frac{n^2+1}{n^2-1}$
i) $\frac{3n}{4n+2}$	**j)** n^2+3n+1	**k)** $\frac{2^n}{2^{n+1}}$	**l)** $\frac{2n-1}{3n+2}$
m) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$	**n)** 2^{n+2}	**o)** $\frac{n}{3^{n-1}}$	**p)** $1+(-1)^{n+1}$

7. Determina el término general de cada sucesión:

Ejercicios	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5			a_n
Ejercicio 1	**1**	**8**	**27**	**64**	**125**			
Ejercicio 2	**1**	**4**	**9**	**16**	**125**			
Ejercicio 3	**-1**	**1**	**-1**	**1**	**-1**			
Ejercicio 4	**2**	**5**	**10**	**17**	**26**			
Ejercicio 5	**2**	**12**	**30**	**56**	**90**			
Ejercicio 6	**0**	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$			

Ejercicio 7	**4**	**7**	**10**	**13**	**16**			
Ejercicio 8	**2**	**1**	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{3}$			
Ejercicio 9	**-1**	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{5}$			

IV. MONOTONIA.

Una sucesión (a_n) es monótona creciente cuando cada término es menor o igual que el término siguiente, es decir, $a_n \le a_{n+1}$, cualesquiera que sea el número natural n.

Ejemplo, la sucesión siguiente es monótona creciente :
1, 2 , 2 , 3 , 3 , 3 , 4 , 4 , 4 , 4 , 5 . . .

Una sucesión (a_n) es estrictamente creciente si es monótona creciente y todos sus términos son distintos., es decir, $a_n < a_{n+1}$, cualesquiera que sea el número natural n.

Ejemplo, la sucesión siguiente es estrictamente creciente :
1 , 3 , 5 , 7 , 9 , . . .

sucesión suma $c_n = \dfrac{n^3}{(n+1)^2}$

EJERCICIOS.
9. Se dan las siguientes sucesiones :

$$a_n = \frac{3+2n}{n} \qquad b_n = \frac{n^2-1}{n} \qquad c_n = \frac{2n+3}{n+1}$$

realiza las siguientes operaciones :

a) (a_n) + (b_n) =	**b) (b_n) - (c_n) =**	**c) (a_n) • (c_n) =**

10. Si $a_n = 2n + 3$ y **$b_n = 3n - 1$** **encuentra los 5 primeros términos de la sucesión** **a) $a_n + b_n$** **b) $a_n \bullet b_n$ =**	**11. Si $a_n = \dfrac{2n+1}{n}$ y** **$b_n = \dfrac{n-1}{n+1}$** **encuentra los 5 primeros términos de la sucesión** **a) $a_n + b_n$** **b) $a_n \bullet b_n$ =**	**11 . Si $a_n = \dfrac{n^2-1}{n}$ y** **$b_n = \dfrac{n}{n+1}$** **encuentra los 5 primeros términos de la sucesión** **a) $a_n + b_n$** **b) $a_n \bullet b_n$ =**

Una sucesión (a_n) es monótona decreciente cuando cada término es mayor o igual que el término siguiente, es decir, $a_n \geq a_{n+1}$, cualesquiera que sea el número natural n.

Ejemplo, la sucesión siguiente es monótona decreciente :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$$

Una sucesión (a_n) es estrictamente decreciente si es monótona decreciente y todos sus términos son distintos., es decir,

$a_n > a_{n+1}$, , cualesquiera que sea el número

Ejemplo, la sucesión siguiente es estrictamente decreciente :

-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, . . .

8. Demuestra a que tipo pertenecen las siguientes sucesiones :

a) $1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \ldots$ **b)** $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \ldots$ **c)** $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \ldots$

VI. OPERACIONES CON SUCESIONES.

a) PRODUCTO DE UNA SUCESIÓN POR UN NUMERO.

La sucesión ($k \cdot a_n$) se llama sucesión producto de un número real k por la sucesión (a_n). Su término general se obtiene multiplicando el término general de (a_n) por el número real k.

Ejemplo, Si la sucesión de término general (n^2) se multiplica por 2, el término de orden general será ($2 \cdot n^2$).

b) SUMA DE SUCESIONES.

La sucesión (c_n) se llama sucesión suma de las sucesiones (a_n) y (b_n)
Su término general se obtiene sumando los términos generales (a_n) y (b_n)

Ejemplo. Si las sucesiones de términos general $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ **y** $b_n = \frac{n}{n+1}$

se suman $\frac{n^2}{n+1} + \frac{n}{n+1} = \frac{n^2+n}{n+1} = \frac{n(n+1)}{n+1} = n$

o sea , la sucesión suma $c_n = n$

c) SUCESION PRODUCTO.

La sucesión (c_n) se llama sucesión producto de las sucesiones (a_n) y (b_n)
Su término general se obtiene multiplicando los términos generales (a_n) y (b_n)

Ejemplo. Si las sucesiones de términos general $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ **y** $b_n = \frac{n}{n+1}$
se multiplican $\frac{n^2}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{n^3}{(n+1)^2}$ **o sea , la s sucesiones :**

$a_n = \dfrac{3+2n}{n}$ $\qquad$ $b_n = \dfrac{n^2-1}{n}$ $\qquad$ $c_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$

realiza las siguientes operaciones :

a) $(a_n) + (b_n) =$	**b) $(b_n) - (c_n) =$**	**c) $(a_n) \bullet (c_n) =$**

10. Si $a_n = 2n + 3$ y $b_n = 3n - 1$ encuentra los 5 primeros términos de la sucesión **a) $a_n + b_n$** **b) $a_n \bullet b_n =$**	**11. Si $a_n = \dfrac{2n+1}{n}$ y $b_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ encuentra los 5 primeros términos de la sucesión** **a) $a_n + b_n$** **b) $a_n \bullet b_n =$**	**11 . Si $a_n = \dfrac{n^2-1}{n}$ y $b_n = \dfrac{n}{n+1}$ encuentra los 5 primeros términos de la sucesión** **a) $a_n + b_n$** **b) $a_n \bullet b_n =$**

LIMITE DE UNA SUCESION.

Sea la sucesión con término general $a_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$

A medida que **n** se hace cada vez mayor, la diferencia entre el término $\mathbf{a_n}$ y el límite 2 se hace cada vez menor.

¿ A partir de qué término la diferencia es menor que una centésima ?

$$\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| \angle \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{1}{n+1}\right| \angle \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \quad n > 99$$

¿ A partir de qué término la diferencia a-2 son menores que un milésimo ?

Haciendo el mismo proceso anterior , llegaríamos a que n > 999

UNA SUCESIÓN DE NÚMEROS REALES (a_n) TIENE POR LÍMITE EL NÚMERO REAL a, CUANDO PARA TODO NÚMERO REAL POSITIVO ε EXISTE UN NÚMERO NATURAL n* , TAL QUE PARA TODO n > n* SE VERIFICA QUE :

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

SE SIMBOLIZA ASÍ :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Las sucesiones que tienen límite real se denominan sucesiones convergentes.

LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Consideremos la sucesión

$$[a_n] = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots \frac{n-1}{n}, \ldots$$

Si n = 100 entonces el término que le corresponde es $\frac{99}{100} = 0{,}99$

Si n = 1000 entonces el término que le corresponde es $\frac{999}{1000} = 0{,}999$

Si n = 1000000 entonces el término que le corresponde es $\frac{999999}{1000000} = 0{,}999999$

Tú puedes comprobar intuitivamente que el número se acerca cada vez más a 1, pero nunca llega a ser igual a 1, por lo que diremos

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1}$$

OPERACIONES CON SUCESIONES CONVERGENTES.

Si las sucesiones (a_n) y (b_n) tienen límite finito, se pueden realizar las siguientes operaciones :

ADICION suma $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$

opuesto $\lim (-a_n) = - \lim a_n$

diferencia $\lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$

MULTIPLICACIÓN producto $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \,.\, \lim b_n$

recíproco $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim b_n}$

cuociente $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$

CONSTANTE producto por k $\lim (k \; a_n) = k \lim a_n$

ENTORNO DEL LIMITE.

El número real **a** es el límite de la sucesión a si **para todo real positivo** suficientemente pequeño, existe un valor $\mathbf{n_o}$ correspondiente al término $\mathbf{a_{no}}$ de la sucesión, a partir del cuál todos los términos siguientes están en el entorno $|a-\varepsilon, a+\varepsilon|$ del punto **a**.

El número real **a** es el límite de la sucesión $\mathbf{a_n}$ sí y sólo sí para cualquier número real positivo **ε** suficientemente pequeño, existe un número natural n_o , tal que $\forall$**n >** $\mathbf{n_o}$ se cumple que $|a_n - a| > \varepsilon$

Es decir :

$$\lim a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 ; \exists n \in \aleph \;/\; |a_n - a| < \varepsilon, \forall n > n_o$$

Toda sucesión que tiene límite se dice que es convergente.

El límite de una sucesión es un número real único.

Ejemplo :

$$\lim \frac{n^2+n}{n} = \lim\left(\frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}}{\frac{n}{n^2}}\right) = \lim\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right) = \frac{\lim 1+\lim\frac{1}{n}}{\lim\frac{1}{n}} = \frac{1+0}{0} =$$

6. Escribe los primeros cinco términos de la sucesión

a) $\frac{1}{2n+1}$	**b)** $\frac{(-1)^n}{n}$	**c)** $\frac{1}{2n-1}$	**d)** n^n
e) $n^2 + (-1)^n n$	**f)** $\frac{n-1}{2n}$	**g)** $\frac{n}{n^2+n+1}$	**h)** $\frac{n^2+1}{n^2-1}$
i) $\frac{3n}{4n+2}$	**j)** n^2+3n+1	**k)** $\frac{2^n}{2^{n+1}}$	**l)** $\frac{2n-1}{3n+2}$
m) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$	**n)** 2^{n+2}	**o)** $\frac{n}{3^{n-1}}$	**p)** $1+(-1)^{n+1}$

1. Determina si cada sucesión es **creciente** o **decreciente**; es **convergente** o **divergente** y determina el límite de ellas cuando n tiende a infinito

$a_n = \frac{2n}{n+1}$	$a_n = \frac{n+1}{n+2}$	$a_n = \frac{n+2}{3}$	$a_n = \frac{n-1}{2n^2-1}$
$a_n = \frac{2n+1}{n+3}$	$a_n = \frac{1}{2n+1}$	$a_n = \frac{2n-1}{n+1}$	$a_n = \frac{1}{n}-\frac{1}{2^n}$
$a_n = \frac{2}{n}-2$	$a_n = 4+\frac{1}{n}$	$a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$	$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
$a_n = \frac{1}{n}$	$a_n = \frac{4n+1}{2n}$	$a_n = 2+\frac{1}{n+1}$	$a_n = \frac{2n^2-1}{2n}$

SUMATORIA DE LOS TÉRMINOS DE UNA SUCESIÓN.

OBJETIVO :

Reconocer, comprender y aplicar la notación de sumatoria y sus propiedades.

CONTENIDOS :

Sumatoria : concepto y propiedades.
Sumatoria de sucesiones de números reales.

Sumatoria de una sucesión es la forma abreviada de escribir sus términos como sumandos.

Ejemplo 1 : $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$

Ejemplo 2 : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_k$$

PROPIEDADES :

1. Suma de una constante :

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = n \cdot c$$

2. Sumatoria del producto de una constante por los términos de una sucesión :

$$\sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$$

3. Sumatoria de la suma o diferencia de dos sucesiones :

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_{k)} = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$$

4. Sumatoria de los n primeros números naturales :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

5. Sumatoria de los n primeros números impares :

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

6. Sumatoria de los cuadrados de los n primeros números naturales :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

7. Sumatoria de los cubos de los n primeros números naturales :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

EJERCICIOS RESUELTOS :

IE DIVERSIFICADO DE CHIA
DEFINICION EJERCICIOS Y EJEMPLOS DE SUSCESIONES Y LIMITES

1. $\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k^2-1=\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}1=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-n$

2. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+\ldots$ n términos

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k^2+k=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\ldots$$

EJERCICIOS POR RESOLVER

1. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots$ n términos

2. $\sum_{k=1}^{7}\frac{k(k+1)}{2}$	**3.** $\sum_{k=1}^{6}\frac{k}{(k+1)^2}$	**4.** $\sum_{k=1}^{8}\frac{(-1)^K(k^2+1)}{4k}$

5. $\sum_{k=1}^{5}(-1)^k\cdot k$	**6.** $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$	**7.** $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot(k^2+1)$

Expresa como sumatoria :

8. $1^2+2^3+3^4+\ldots$	9. $2+5+8+\ldots+44$
10. $1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5+\ldots+10\cdot 19$	10. $1+4+7+\ldots+43$
12. $3+5+7+9+\ldots$	13. $1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6+4\cdot 7$
14 $\frac{-1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$	15. $1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{4}{27}$

Aplica propiedades y calcula :

16. $\sum_{k=1}^{10}7(k^3+1)$	17 $\sum_{k=11}^{20}(k^2+2)(k-2)$

Calcula la sumatoria de :

18. $\sum_{k=1}^{40}k$	19. $\sum_{k=1}^{30}(2k-1)$
20. $\sum_{k=1}^{63}k^2$	21. $\sum_{k=1}^{70}(k^2+k)$

Usa las fórmulas conocidas para el cálculo de :

22. $\sum_{k=1}^{n} 2k$	23. $\sum_{k=1}^{n} (3k-2)$
24. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2$	25. $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2$

OBJETIVO:

INTERPRETAR EL CONCEPTO DE FACTORIAL.

CONTENIDOS

Factorial

FACTORIAL.

DEFINICIÓN **n! = 1• 2 • 3 • ... • (n-2) • (n-1) • n**

Es decir, n factorial es el producto de los **n** primeros números naturales.

1! = 1 0! = 1 n! = n • (n-1)!

EJERCICIO RESUELTO

Ejemplo 1 : $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

EJERCICIOS POR RESOLVER

1. Simplificar a) $\frac{15!}{13!.\ 2!} =$ b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ c) $\frac{(x+6)!}{(x+4)!}$

2. Expresa en forma factorial : a) 13• 12 •11 b) $\frac{1}{25 \bullet 24}$

3. Es verdadera la igualdad $\frac{2! + 3! + 4!}{16} = 2!$

OBJETIVO

CONOCER Y APLICAR EL CONCEPTO DE COEFICIENTE BINÓMICO

CONTENIDO

COEFICIENTE BINÓMICO

COEFICIENTE BINOMICO.

DEFINICIÓN : $\binom{n}{r} = \frac{n \bullet (n-1) \bullet (n-2) \bullet \ldots \bullet (n-r+1)}{1 \bullet 2 \bullet 3 \bullet \ldots (r-1) \bullet r}$

$\binom{n}{n} = 1$ $\binom{0}{0} = 1$

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b! \bullet (a-b)!}$$

EJERCICIO RESUELTO

Ejemplo 1.

$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$

EJERCICIOS POR RESOLVER :

¿Es verdadera cada proposición ?:

4) $\binom{7}{4} + \binom{7}{5} = \binom{8}{4}$

5) $\binom{5}{3} + 2\binom{5}{4} + \binom{5}{5} = \binom{7}{5}$

6) $\binom{-1}{2} = 4$

7) $\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{3}{4}$

8) $2^4 = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$

9. Simplifica $\dfrac{\binom{16}{1} + \binom{16}{2}}{\binom{17}{14} + \binom{17}{15}} =$

10 Determina el valor de x en : $\binom{x}{1} + 2\binom{x}{2} + \binom{x}{3} = 20$

11. $\binom{n+1}{n} : \binom{n}{n-1} =$

12. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} =$

Demuestra si existe igualdad en :

13. $\binom{n+1}{n-1} : \binom{n}{n-2} = \frac{n+1}{n-1}$

16. Resuelve la ecuación : $\binom{35}{x} = \binom{35}{x+7}$

17. El valor de x en : $\binom{12}{7} = \binom{12}{5} + \binom{12}{x}$

OBJETIVO :

DEDUCIR EL TEOREMA DEL BINOMIO.

CONTENIDO

TEOREMA DEL BINOMIO

TEOREMA DEL BINOMIO.

Los coeficientes de las potencias de (a + b) se organizan de acuerdo al triángulo de Pascal :

$(a + b)^0 = \quad 1$

$(a + b)^1 = \quad a + b$

$(a + b)^2 = \quad a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = \quad a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a + b)^4 = \quad a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a + b)^5 = \quad a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

....

se obtienen sólo los coeficientes

1	$\binom{0}{0}$
1 1	$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$
1 2 1	$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$
1 3 3 3	$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$
1 4 6 4 1	$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$

....

entonces se puede obtener el desarrollo de un binomio elevado a la potencia **n**

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

o también $$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$

EJERCICIOS RESUELTO :

$(x - 2y)^5 =$

$$\binom{5}{0}x^5(-2y)^0 + \binom{5}{1}x^4(-2y)^1 + \binom{5}{2}x^3(-2y)^2 + \binom{5}{3}x^2(-2y)^3 + \binom{5}{4}x^1(-2y)^4 + \binom{5}{5}x^0(-2y)^5 =$$

$$x^5 + 5 \cdot x^4 \cdot (-2y) + 10 \cdot x^3 \cdot 4y^2 + 10 \cdot x^2 \cdot (-8y^{3)} + 5 \cdot x \cdot 16y^4 + (-32y^5) =$$

$$x^5 - 10x^4y + 40x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 - 32y^5$$

EJERCICIOS POR RESOLVER

19. Desarrolla cada uno de los siguientes binomios :

a) $(x - y)^5$ b) $(2x - 3y)^4$ c) $(2 - 3ab)^5$

d) $\left(\frac{3}{2}x + 2y\right)^4$ e) $\left(\frac{3}{2}a + \frac{2}{5}b^2\right)^3$ f) $(3p - q)^5$ =

Para determinar el término de orden **p**

$$t_p = \binom{n}{p-1} a^{n-(p-1)} n^{p-1}$$

20. Encuentra :

a) el sexto término de $(x+y)^{15}$ b) el quinto término de $(a-b)^9$

c) el cuarto término de $(x^2 - y^2)^{11}$ d) el noveno término de $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{x}\right)^{12}$

PROGRESIÓN ARITMÉTICA.

OBJETIVOS :
Aplicar los conceptos y las propiedades de las progresiones aritméticas.

CONTENIDOS :
Una progresión aritmética (P.A.) es una secuencia de números relacionados de tal manera que cada uno, después del primero, se pueden obtener del que le precede sumando a éste una cantidad fija llamada diferencia común.

a_1 = primer término de la P.A.
d = diferencia común de la P.A.
a_n = término enésimo (último) de la P.A.
n = números de términos de la P.A.
S_n = suma de los n términos de la P.A.

FÓRMULAS :

$a_n = a_1 + (n - 1)d$ $d = a_n - a_{n-1}$ $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

IE DIVERSIFICADO DE CHIA
DEFINICION EJERCICIOS Y EJEMPLOS DE SUSCESIONES Y LIMITES

EJERCICIOS :

1. Escribe los n primeros términos de la P.A. siguiente, cuyos datos son :

a) $a_1 = 3$; $d = 3$; $n = 5$	**b)** $a_1 = -1$; $d = 2$; $n = 7$
c) $a_1 = -5$; $a_3 = -1$; $n = 6$	**d)** $a_6 = 2$; $a_2 = 11$; $n = 6$

2. Encuentra la suma de los términos de la P.A. de acuerdo a los siguientes datos :

a) $a_1 = 6$; $d = 3$; $n = 5$	**b)** $a_1 = -8$; $d = 3$; $n = 11$
c) $a_1 = -3$; $a_n = 9$; $n = 7$	**d)** $a_1 = 1$; $a_n = 7$; $n = 8$

3. De las variables, a_1 ; a_n ; n ; d ; S ; encuantra las que faltan en cada una de las siguientes agrupaciones :

a) $a_1 = 2$; $d = -0,5$; $n = 8$	**b)** $a_n = -11$; $S = -32$; $n = 8$
c) $a_1 = 4$; $n = 11$; $S = -11$	**d)** $a_n = 1$; $d = -1$; $S = 78$

4. Calcula el término de orden 14 en una P.A. si el primer término es 5 y la diferencia es 4.
5. El undécimo término de una P.A. es 49 y su diferencia es 4. Encuentra el primer y el octavo término.
6. Encuentra la P.A. cuyo quinto término es 14 y el décimo término es 29.
7. Interpola cinco términos entre 3 y 6.
8. Hallar tres números que están en P.A. sabiendo que la suma del primer y del tercer término es 44 y el producto del segundo por el primer término es 418.
9. Encuentra la suma de los 100 primeros múltiplos de tres.
10. Se dan las siguientes P.A. encuentra el término que se indica : **5, 8,, 11, 14 ...** a_{10} **5, 2, -1, -4, ...** a_{15} **3, 8, 13, 18, ...** a_{12} $\frac{1}{2}, \ 2, \ 3\frac{1}{2}, \ 5, \ldots$ a_{10}

11. Determina cuántos términos tiene una P.A. si el primero es 5, el último es 50 y la diferencia es 3 .
12. Halla una P.A. tal que la suma de los primeros veinte términos es 120 y su diferencia es 2.
13. Encuentra la diferencia en una P.A. cuyo término de lugar 27 es 32 y cuyo término de lugar 18 es 5. Encuentra además el primer término.
14. Interpola tres términos entre 12 y 42. Interpola cinco términos entre 6 y $9\frac{1}{4}$
15. Encuentra la suma de los diez primeros términos de las siguientes sucesiones : a) 1, 2, 3, ... b) 5, 2, -1, ... c) 1, $\frac{1}{2}$, 0 , ...
16. Halla la suma de los primeros quince términos de una P.A. si se sabe que el quinto término es 17 y el séptimo término es 23.
17. Halla una P.A. de 8 términos sabiendo que los cuatro primeros términos suman 40 y que los cuatro últimos suman 72.
18. Para construir una vía elevada se levanta sobre una superficie horizontal una rampa de pendiente uniforme la que se sostiene sobre 12 soportes de fierro igualmente espaciados. La altura del primer soporte es 2 m y la del más alto es 51,5 m. Encuentra la altura de cada soporte y la suma del fierro a emplear.
19. Se deja caer una bola de goma, la que en el primer bote se levanta 1 metro del suelo, en el segundo bote 95 cm, en el tercer bote 90 cm y así sucesivamente. Calcula cuánto ha recorrido la bola desde que toca por primera vez el suelo hasta que llega al punto más alto después del décimo bote.

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA.

Una progresión geométrica (P.G.) es una secuencia de números relacionados de tal manera que, cada uno, después del primero, se puede obtener del que le precede multiplicándolo por una cantidad fija llamada razón común .

a_1 = primer término de la P.G.
a_n = último término de la P.G.
r = razón de la P.G.
n = número de términos de la P.G.
S = suma de los términos de la P.G.

Ejemplo : Primer elemento 3
razón 4

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
3	**3 ·4 = 12**	**12 · 4 = 48**	**48 · 4 = 192**	**192 ·4 = 768**

Es decir, la P.G. es 3, 12, 48, 192, 768, ...

Fórmulas :

DEFINICION EJERCICIOS Y EJEMPLOS DE SUSCESIONES Y LIMITES

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$	$r = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$	$S = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

EJERCICIOS :

1.	Escribe los "n" primeros términos de la P.G. de acuerdo a los siguientes datos : **a)** $a_1 = 3$; $r = 3$; $n = 6$ b) $a_1 = -4$; $r = 3$; $n = 4$ c) $a_1 = 8$; $a_2 = 4$; $n = 6$ **d)** $a_2 = 1$; $a_5 = 125$; $n = 5$
2.	Encuentra el término de orden "n" en las siguientes P.G. a) $a_1 = 2$; $r = 2$; $n = 5$ b) $a_1 = 625$; $r = 0{,}2$; $n = 6$ **c)** $a_1 = 343$; $r = \frac{1}{7}$; $n = 5$
3.	Encuentra la suma de los términos que se indican en cada P.G. : a) $a_1 = 1$; $r = 2$; $n = 5$ b) $a_1 = 125$; $r = 0{,}2$; $a_n = 0{,}2$ c) $a_1 = \frac{1}{2}$; $r = 2$; $n = 7$ d) $a_1 = 81$; $r = \frac{1}{3}$; $n = 6$

4.	Encuentra las variables faltantes entre S, a_1 , a_n , r , n en las siguientes P.G. : a) $a_n = 27$; $r = 3$; $n = 6$ b) $a_n = 1$; $r = \frac{1}{2}$; $S = 511$ c) $a_n = 1$; $r = 0{,}2$; $n = 5$ d) $a_1 = 256$; $n = 3$; $S = 256$
5.	Halla el quinto término y la suma de los diez primeros términos de la P.G. : 8, 4, 2, ...
6.	El segundo término de una P.G. es $\frac{4}{3}$ y el quinto es $\frac{32}{3}$. Encuentra el octavo término.
7.	En una P.G. el primer término es 23 y la razón es 2. ¿ Cuántos términos se deben sumar para que el resultado sea 1449 ?
8.	Gonzalo gana $ 1. El primer día de trabajo, $ 2 el segundo día, $ 4 el tercer día, $ 8 el cuarto día. ¿ Cuánto habrá ganado al cabo de 20 días de trabajo ?
9.	Encuentra los cinco primeros términos de una P.G. de modo que el primero sea 2 y el segundo 3.
10.	Interpola dos medios geométricos entre a y b.
11.	Determina cuántos términos tiene la P.G. cuyo primer término es 2 y cuyo último término es 512 si su suma es 682.
12.	Se sabe que una determinada bacteria se reproduce por bipartición cada 20 minutos, es decir de cada bacteria aparecen 2 cada 20 minutos. ¿ Cuántas bacterias habrán pasadas 10 horas desde que se detectó la primera ?

XI. PROGRESIÓN GEOMÉTRICA INFINITA.

Si $n \to \infty$ y $|r| > 1$ entonces $S = \dfrac{a_1}{1-r}$

1.	Encuentra la suma de a) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$ B) $a_1 = 5$; $r = \frac{3}{5}$ c) $a_1 = 4$; $a_2 = 2{,}4$ d) $a_1 = 4$; $a_4 = \frac{4}{125}$ e) $a_2 = 64$; $a_4 = 4$
2.	Si una pelota rebota tres cuartos de la distancia recorrida en su caída. Calcula la distancia real que recorrerá antes de alcanzar su estado de reposo si se ha dejado caer desde 2,6 metros.
3.	Una bicicleta baja una pendiente frenando de tal modo que cada segundo recorre tres cuartos de distancia recorrida en el segundo anterior. Calcula el espacio recorrido hasta detenerse si avanzó 5 metros en el primer segundo.
4.	Un niño recibe $ 5000 durante el primer año de vida de un fondo que le asegura un ingreso anual igual a la mitad del valor recibido el año anterior. Calcula el valor aproximado que llegará a recibir hasta que su primer nieto esté en segundo año básico.
	Se tiene un cuadrado de lado "a". Se inscribe en él un cuadrado uniendo los puntos medios de los lados del cuadrado original y así se van inscribiendo cuadrados cada vez más chicos. Calcular la suma de las áreas y de los perímetros de los infinitos cuadrados así obtenidos.

INDUCCCIÓN MATEMÁTICA.

OBJETIVO : Demostrar la validez de proposiciones y fórmulas mediante el principio de Inducción Matemática.

CONTENIDOS : El Principio de Inducción completa es una proposición "q" expresada en términos de una variable "k" que cumple :

1) **es verdadera si k = 1**
2) **a partir de que k = p se deduce que también es válida para K 0 p+1 entonces dicha proposición "q" es válida para cualquier número natural.**

Para llegar a una generalización se debe examinar un cierto número de casos particulares para descubrir la forma en que están relacionados. Una vez que se encuentra la mencionada relación se constituye en generalización o ley. Es decir se trabaja de lo particular a lo general, lo que forma el método de la lógica llamado inducción.

EJERCICIOS :
Demuestra las siguientes proposiciones por medio de inducción :

1) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$

3) $3 + 5 + 7 + \ldots + (2n+1) = n(n + 2)$

4) $1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$

5) $4 + 7 + 10 + ... + (3n + 1) = \dfrac{n}{2}(3n+5)$

6) $3 + 6 + 9 + ... + 3n = \dfrac{3n}{2}(n+1)$

7) $1 + 5 + 9 + ... + (4n - 3) = n(2n - 1)$

8) $2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n = 2(2^n - 1)$

9) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

10) $2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + ... + 2n(2n+2) = \dfrac{4n(n+1)(n+2)}{3}$

11) $1 + 3 + 6 + ... + \dfrac{1}{2}n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

12) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

ACTIVIDAD EN EL CUADERNO

1.	Desarrolla las siguientes sumatorias y obtén el resultado : a) $\sum_{k=1}^{5}(2k-1) =$ b) $\sum_{k=1}^{6}(k+1)(k-1) =$
2.	Escribe en forma de sumatoria las siguientes series : a) $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+...$ b) -1 + 2 −3 + 4 − 5 c) $1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6+4\cdot 7$
3.	Calcula el valor de la siguiente suma : $\sum_{k=18}^{27}(k^3-k) =$
4.	Calcula el valor de las siguientes sumas : a) $\sum_{k=1}^{36}(1-2k) =$

	b) $\sum_{k=1}^{30} k(k-3) =$
5.	Calcula los siguientes valores : a) $\frac{30!}{28!} =$ b) $\binom{5}{3} + \binom{5}{2} =$ c) $\frac{(k+1)!}{(k-1)!} =$ d) $\binom{6}{3} + 2\binom{5}{3} - \binom{5}{2} =$
6.	Compara las siguientes igualdades : a) $\frac{4!+5!+6!}{36} = 4!$ b) $\binom{9}{3} + \binom{9}{4} = \binom{10}{4} =$ c) $\binom{7}{5} : \binom{6}{4} = \binom{7}{5} =$
7.	Calcula el valor de x en : a) $\binom{x}{2} = 15$ b) $\binom{x}{x-2} = 36$