Chía,

Señores estudiantes Grados DECIMOS, adjunto encontrarán un breve resumen de los temas que vamos a estudiar este último periodo académico, el trabajo que deben realizar consiste en leer y hacer una síntesis de la recta y cada cónica y en un octavo de papel iris hacer un folleto, realizar las ecuaciones canónicas y generales de cada una de las cónicas. Este trabajo debe estar listo para el día que se les asigne a cada curso. Los ejercicios los vamos desarrollando en clase y de tarea de acuerdo a las indicaciones que se hagan.

Estos datos se extraen de internet y del libro de Santillana

(www.elo.jmc.utfsm.cl/ggarrido/.../**conicas/**)

(www.SECCIONES/conicas**)**

Rosario Monastoque R.

LA LINEA RECTA

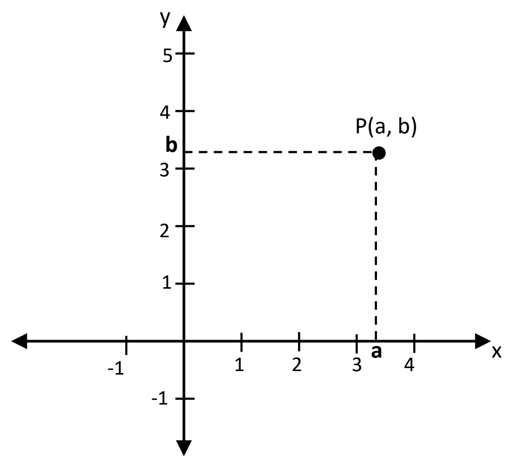
Ejes de coordenadas

El sistema de ejes coordenados está formado por dos rectas numéricas, una horizontal y otra vertical llamadas ejes.

El eje horizontal (eje x) se denomina eje de las abscisas y el eje vertical (eje y) se denomina eje de las ordenadas.

Sobre el sistema de ejes coordenados es pueden ubicar todos los pares ordenados de la forma (a, b), como lo muestra la figura.

En el punto P(a, b) los elementos a y b se llaman coordenadas del punto P



Distancia entre dos puntos

Supongamos que $P_1\ (x_1\ ,\ y_1\ )$ y $P_2\ (x_2\ ,\ y_2\ )$
Son dos puntos del plano tal como se observa en la figura.

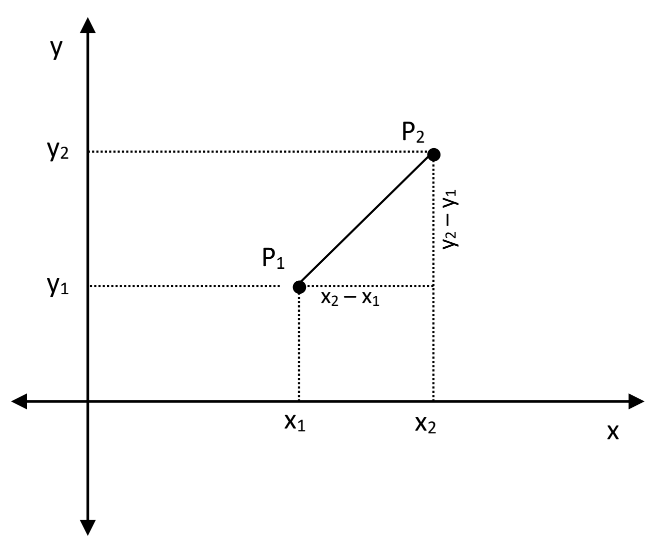
La distancia entre P_1 y P_2 se puede determinar, por ejemplo, mediante el teorema de Pitágoras, de la siguiente manera:

$$\left(\overline{P_1P_2}\right)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Así la distancia de P_1 a P_2 es:

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

FORMULA DE LA DISTANCIA ENTRE DOS FUNTOS



FORMULA PUNTO MEDIO $M = \left(\frac{X_1+X_2}{2}, \frac{Y_1+Y_2}{2}\right)$

Ejemplo: La distancia entre los puntos y el punto medio A(-4, 7) y B(3, -5) es:

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-(-4))^2 + (-5-7)^2}$$
$$= \sqrt{49 + 144}$$
$$\overline{AB} = \sqrt{193}$$

$$\mathbf{M} = \left(\frac{X_1+X_2}{2}, \frac{Y_1+Y_2}{2}\right) = \left(\frac{-4+3}{2}, \frac{7+(-5)}{2}\right)$$

$$\mathbf{M} = \left(\frac{-1}{2}, \frac{2}{2}\right)$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA LÍNEA RECTA

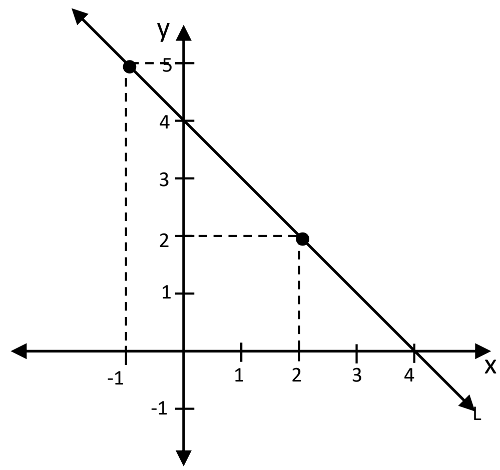
En toda igualdad de la forma ax + by = c , donde a,b,c $\in$ R, representa una ecuación lineal con dos incógnitas, las soluciones son pares ordenados de la forma (x, y). Este par ordenado (x, y) corresponde a un punto del plano cartesiano.

Ejemplo: la ecuación L: x + y = 4

Tabla de valores

x	y	(x, y)
2	2	(2, 2)
1	3	(1, 3)
0	4	(0, 4)
-1	5	(-1, 5)

Gráfico

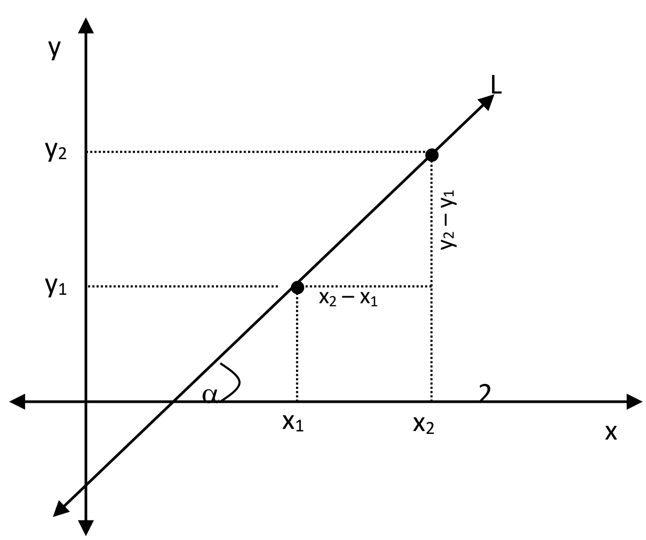


Observaciones:

- A toda ecuación lineal (de primer grado) con dos incógnitas le corresponde gráficamente una recta.
- Cada par ordenado de números (x, y) corresponde a las coordenadas de un punto que es solución de la ecuación dada, es decir satisface esta ecuación .
- Los puntos que cada par ordenado representa pertenecen a la recta correspondiente.

PENDIENTE DE UN RECTA

Se denomina pendiente "m" de una recta al grado de inclinación "α" que tiene respecto del eje de las abscisas (eje x)



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ **FORMULA DE LA PENDIENTE DE UNA RECTA**

Ejercicios

1. Supongamos que se tienen 4 rectas L_1 , L_2 , L_3 y L_4 de modo que :

L_1 pasa por los puntos: A(1, 2) y B(2, 1)
L_2 pasa por los puntos: P(1, 2) y Q(5,2)
L_3 pasa por los puntos: D(1,2) y E(1,-5)
L_4 pasa por los puntos: R(1,2) y T(-2,-6)

2. Grafica cada una de éstas rectas en un mismo sistema de ejes cartesianos.

3. Calcula la pendiente de cada una de éstas rectas.

4. Establece conclusiones válidas en relación a la inclinación de cada una de estas rectas con respecto al eje x y compáralo con el valor de su pendiente.

5. ¿Qué ocurre cuando $y_2 = y_1$?, ¿y si $x_2 = x_1$?

Interpreta y dibuja las siguientes situaciones:

6. $m = \frac{2}{3}$

7. $m = \frac{-2}{3}$

Dado el cuadrilátero ABCD cuyos vértices son los puntos A(1,2), B(5,2), C(3,4) y D(7,4)

8. Demuestra que éste cuadrilátero es un paralelógramo.
9. Calcula el perímetro del paralelógramo.

Decimos que tres o mas puntos son colineales cuando pertenecen a una misma línea recta, determina, en cada caso, si los puntos son o no colineales. Realiza además el gráfico correspondiente:

10. A(2, 3) ; B(4, 5) ; C(6, 7)

11. A(-5, 1) ; B(1, 15) ; C(-4, 15)

Haz el gráfico correspondiente a las siguientes rectas, en un mismo sistema de ejes coordenados y establece conclusiones válidas respecto a lo que observas en ellas.

12. L_1 : $y = 2x - 1$

13. L_3 : $x + y = -3$

14. L_4 : $y = x$

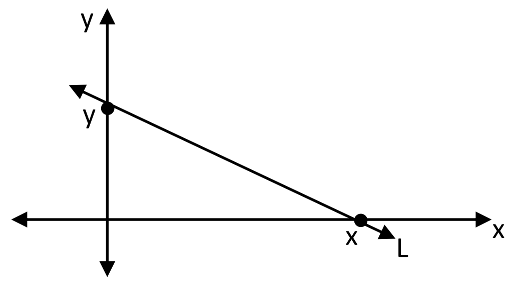
15. L_5 : $2x - y + 3 = 0$

16. L_2 : $y = \frac{1}{2}x$

17. $x + 2y = 1$

Puntos de intersección de una recta con los ejes coordenados

Según la gráfica que se muestra a continuación, los puntos donde la recta L corta al eje x son de la forma (x, 0) y donde corta al eje y , de la forma (0, y).

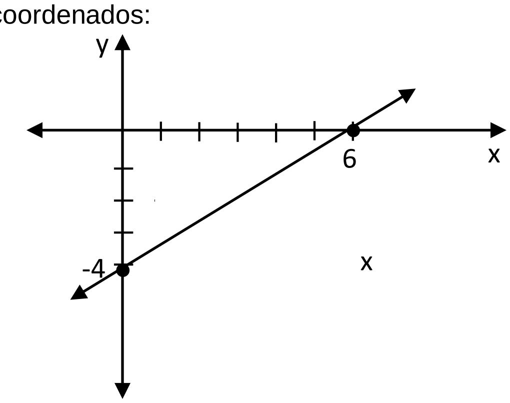


Ejemplo:

Hallar la intersección de la recta $2x - 3y = 12$ con los ejes coordenados:

- Intersección con el eje x : se hace $y = 0$
  Resulta: $2x = 12$
  de donde : $x = 6$
  Así la recta corta al eje x en el punto (6, 0)

- Intersección con el eje y : se hace $x = 0$
  Resulta: $-3y = 12$
  de donde : $y = -4$
  Así la recta corta al eje y en el punto (0, -4)



EJERCICIOS

Dadas las siguientes rectas encuentra la intersección de ellas con los ejes coordenados:

18. $x - 2y = 2$

19. $3x - 6y = 18$

20. $x + \frac{1}{2}y = 1$

21. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 1$

ECUACIÓN DE LA LÍNEA RECTA

Toda igualdad de la forma ax + by = c , donde a,b,c $\in$ R, también se puede escribir en la forma y = mx + n , es decir como una función, donde m es la pendiente o *coeficiente de dirección* y n es la intersección de la recta con el eje y , llamada también *coeficiente de posición*.

De esta forma, podemos afirmar que una recta está perfectamente definida si se conocen :

SI SE CONOCEN DOS PUNTOS DE LA RECTA A Y B

Ejemplo: Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(5, 4) y B(7, 8)

Calculemos su pendiente $m = \frac{8-4}{7-5} \Leftrightarrow m = \frac{4}{2} \Leftrightarrow m = 2$

Como y = mx + n , considerando el punto A(5,4) con x = 5 e y = 4

Tenemos $4 = 2 \cdot 5 + n$
$4 = 10 + n$ /-10
$-6 = n$

Luego: y = 2x – 6 es la ecuación pedida

SI SE CONOCE UN PUNTO Y SU PENDIENTE.

Ejemplo: Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(2, -5) y tiene pendiente -4

Como, el punto dado es A(2,-5) con x = 2 e y = -5 y el valor de la pendiente es m=-4
Entonces y = mx + n
Tenemos $-5 = -4 \cdot 2 + n$
$-5 = -20 + n$ /+20
$15 = n$

Luego: y = -4x + 15 es la ecuación pedida

EJERCICIOS

Encuentra la ecuación de la recta que:

1. Pasa por el punto P(-1, 3) y cuya pendiente es -2

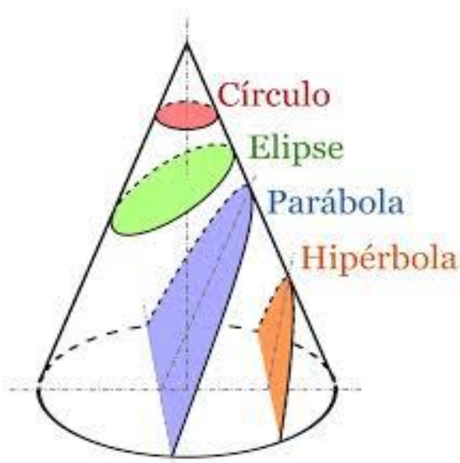
2. Pasa por los puntos R(-1, 2) y T(1, 7)

Analiza cuidadosamente las rectas que cumplen:

3. Su pendiente es m = 0
4. Sus ecuaciones son de la forma x = a
5. Sus ecuaciones son de la forma y = mx

INVESTIGAR LA ECUACION GENERAL Y CANONICA DE LA RECTA (Escribirla en el folleto)

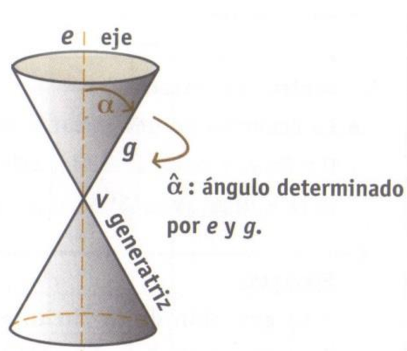
SECCIONES CÓNICAS



Para los antiguos geómetras griegos como Euclides (300 A.C.) y Arquímedes (287-212 A.C.), una sección cónica (parábola, elipse e hipérbola) era una curva en el espacio, la cual resultaba de la intersección de un plano con un cono de dos mantos o ramas, siempre y cuando el plano no pasara por el vértice del cono. En caso de que lo hiciera daba lugar a las llamadas cónicas degeneradas (un punto (el vértice del cono), una recta (un generatriz del cono) o un par de rectas que se intersecan (un par de generatrices)).
Los griegos en su tiempo se dedicaron con perseverancia al estudio de sus propiedades geométricas. Sin embargo, es hasta inicios del siglo XVII (1637), con el descubrimiento casi de manera independiente de la geometría analítica, por parte de Descartes y Fermat, que se toma conciencia de su utilidad y pasan a ocupar un lugar de privilegio, adicionalmente Kepler descubrió (y Newton explicó) que las órbitas de los planetas y otros cuerpos en el sistema solar son secciones cónicas.

La geometría analítica plana usa el algebra y el cálculo para estudiar las propiedades de las curvas en el plano XY. Su idea fundamental es establecer una correspondencia entre una ecuación $F(x;y)=0$ y su lugar geométrico. Una de las ideas centrales de la geometría analítica es que dado un lugar geométrico o una curva, sus propiedades pueden deducirse en forma algebraica o analítica a partir de su ecuación $F(x;y)=0$.

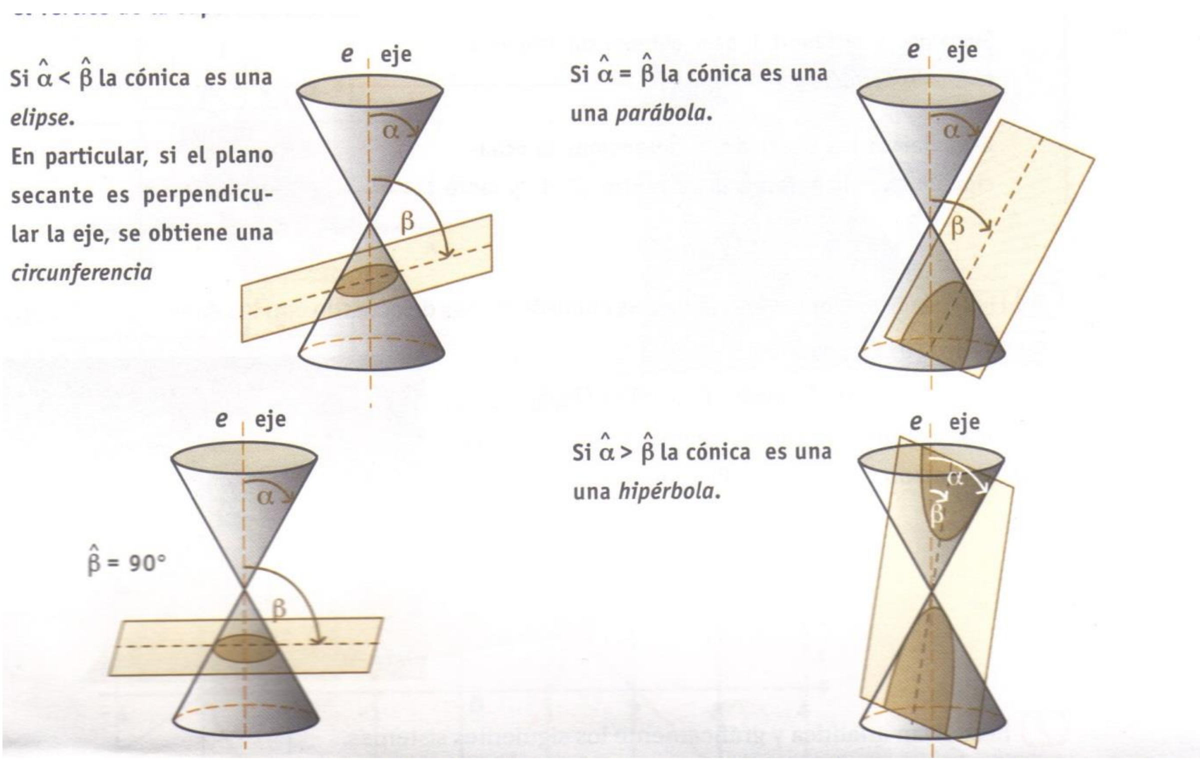
Una recta que gira alrededor de otra recta, con la cual se corta en un punto fijo, genera una superficie cónica. Por ejemplo, la superficie cónica circular recto g (generatriz) que gira alrededor



de la recta e (eje). El punto v es el vértice de la superficie

Las secciones cónicas son curvas que resultan de la intersección de un plano secante con una superficie cónica. Este plano determina un ángulo β con el eje.

Las siguientes secciones cónicas se obtienen como intersección con planos que no incluyen el vértice



1 La Circunferencia

Definición

Una circunferencia es el conjunto de puntos $P=(x;y)$ en el plano que equidistan de un punto fijo $C(h,k)$ (llamado centro) a una distancia fija r (llamado radio)

Teorema

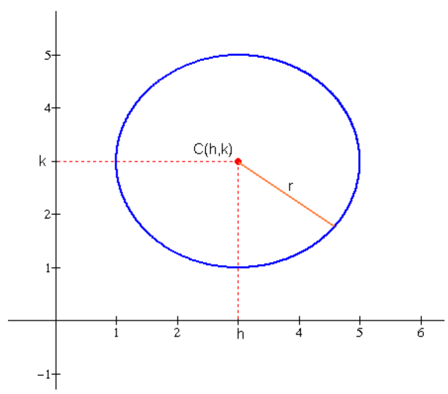
La forma canónica de una circunfería de radio $r \in IR^+$ y centro $C(h,k)$ es

$$(x-h)^2+(y-h)^2=r^2$$

La forma general de una circunfería de radio $r \in IR^+$ y centro $C(h,k)$ es

$$x^2+y^2+Cx+Dy+E=0$$

Su grafica es



Demostracion:
Sean $P(x,y)$ y , $C(h,k)$ tal que,

$$|PC|=r$$

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

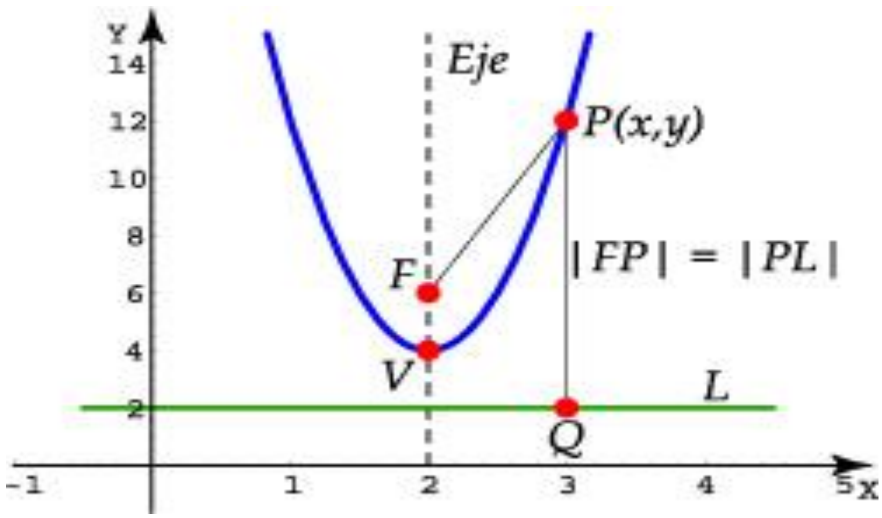
2 La Parábola

Ahora, vamos a deducir las ecuaciones de las secciones cónicas a partir de su definición como lugares geométricos y no como la intersección de un cono con un plano, como se hizo en la antigüedad. Ya conocemos que la gráfica de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$, es una parábola. Sin embargo, no toda parábola es la gráfica de una función, como podemos concluir de la siguiente definición.

Definición

Una parábola es el conjunto de puntos $P = (x; y)$ en el plano que equidistan de un punto fijo F (llamado foco de la parábola) y de una recta fija L(llamada la directriz de la parábola) que no contiene a F (figura 8).

Figura 1



El punto medio entre el foco y la directriz se llama vértice, la recta que pasa por el foco y por el vértice se llama eje de la parábola. Se puede observar en la figura 8 que una parábola es simétrica respecto a su eje.

2.1 Ecuación canónica de la parábola

2.1.1 Eje Focal de la parábola es Vertical

Teorema

La forma canónica de la ecuación de una parábola con vértice $V = (h; k)$ y directriz $y = k - p$ es

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Donde foco F está a $|p|$ unidades (orientadas) del vértice

Demostracion

Sean $P(x,y)$ punto cualquiera, $F(h,k+p)$ su foco, $Q(x,k-p)$ punto en la recta directriz $L: y=k-p$,

$$|FP|=|PQ|$$

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-(k+p))^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y-(k-p))^2}$$

$$\sqrt{(x-h)^2+((y-k)-p)^2}=\sqrt{0+(y-(k-p))^2}$$

$$\sqrt{(x-h)^2+((y-k)-p)^2}=\sqrt{(y-(k-p))^2}$$

$$(x-h)^2+((y-k)-p)^2=(y-(k-p))^2$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2-2p(y-k)+p^2=y^2-2y(k-p)+(k-p)^2$$

$$(x-h)^2+y^2-2ky+k^2-2py+2pk+p^2=y^2-2ky+2py+k^2-2kp+p^2$$

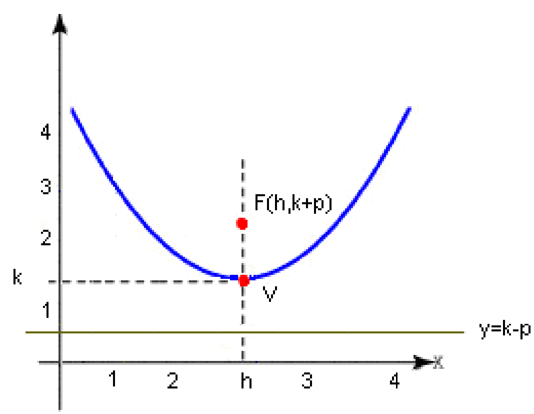
$$(x-h)^2=4py-4kp$$

$$(x-h)^2=4p(y-k)$$

Con este resultado podemos resumir que
Se tiene que Caso 1 Apertura de la parábola hacia arriba.

Valor de p	Coordenadas del Foco F	Ecuación de la directriz
$p>0$	$(h,k+p)$	$y=k-p$

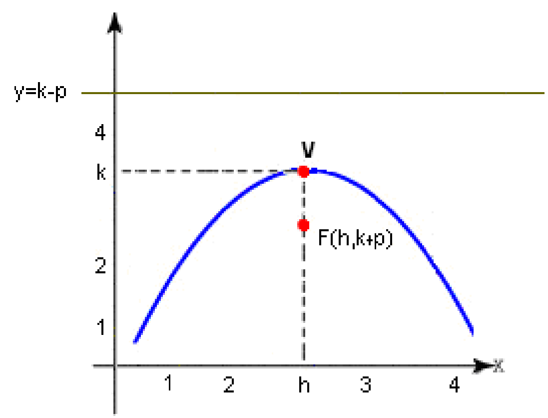
Y su grafica es



Se tiene que Caso 2 Apertura de la parábola hacia Abajo.

Valor de p	Coordenadas del Foco	Ecuación de la directriz
$p<0$	$(h,k+p)$	$y=k-p$

Y su grafica es



2.1.2 Eje Focal de la parábola es Horizontal

Teorema

La forma canónica de la ecuación de una parábola con vértice $V=(h;k)$ y directriz $x=h-p$ es

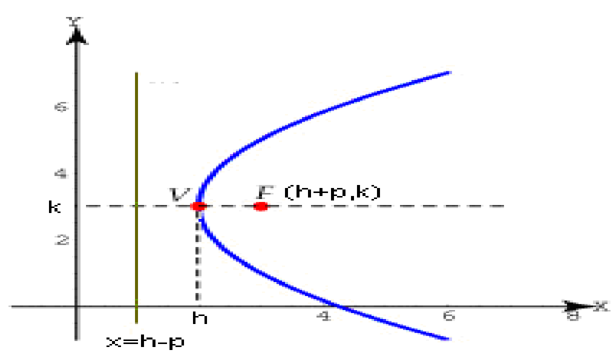
$$(y-k)^2=4p(x-k)$$

Donde foco F está a $|p|$ unidades (orientadas) del vértice

Con este resultado podemos resumir que si:
Se tiene que Caso 1 Apertura de la parábola hacia la derecha.

Valor de p	Coordenadas del Foco	Ecuación de la directriz
$p>0$	$(h+p,k)$	$x=h-p$

Su grafica



Se tiene que Caso 2 Apertura de la parábola hacia la izquierda

Valor de p	Coordenadas del Foco	Ecuación de la directriz
$p<0$	$(h+p,k)$	$x=h-p$

Su grafica

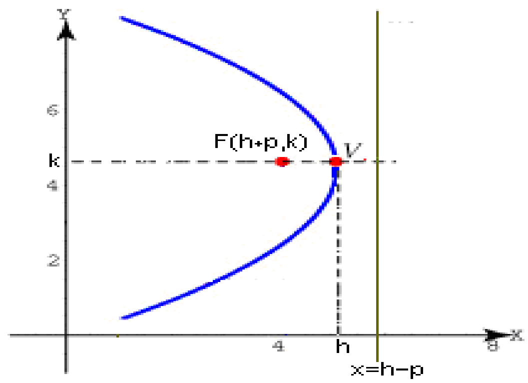
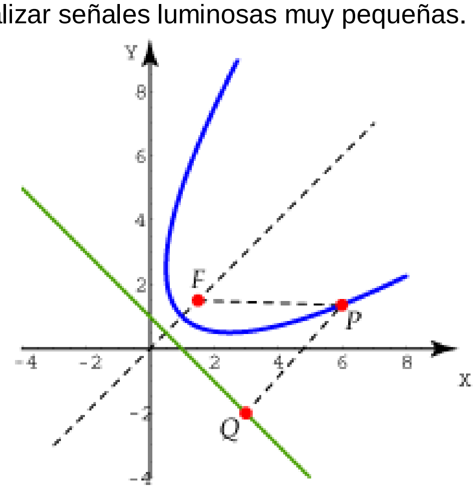


Figura 4.

2.2 Propiedades de la parábola

Una de las propiedades geométricas de la parábola más utilizada fue descubierta por los griegos: un rayo, por ejemplo, de luz, que emane del foco, se refleja en la parábola a lo largo de una trayectoria paralela al eje de la parábola, sin importar cuál sea el punto de reflexión. O recíprocamente, un rayo paralelo al eje de la parábola y reflejado en ella pasa por el foco. Este hecho es útil en la construcción de linternas, faros automotrices y faros buscadores, en los cuales el reflector tiene una sección transversal parabólica y la fuente luminosa esta en el foco. Igualmente, en los telescopios y receptores de radar, las señales de una fuente remota entran paralelas al eje y se reflejan pasando por el foco, mediante un reflector parabólico. La potente concentración que produce un reflector parabólico grande, como el de un radiotelescopio, hace posible detectar y analizar señales luminosas muy pequeñas.



2.2.1 Propiedad de reflexión

Teorema

La tangente a una parábola en un punto $P(x, y)$ forma ángulos iguales con :

- La recta que pasa por P y por el foco (ángulo de reflexión).
- La recta que pasa por P y es paralela al eje de la parábola (ángulo de incidencia).

La propiedad de reflexión se muestra en la figura 11.

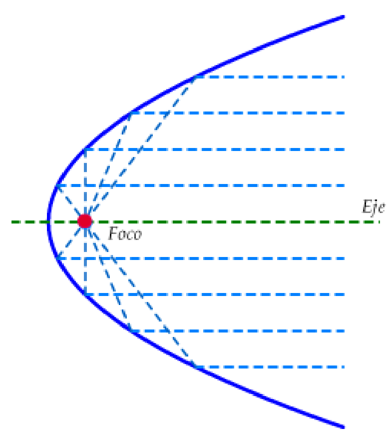


Figura 2

3 . La Elipse

Más de mil años después de que los griegos definieran las secciones cónicas, en la época del Renacimiento, el astrónomo polaco Nicholas Copérnicus (1473 - 1543), en su obra : Sobre las revoluciones de las esferas celestes, sostenía que todos los planetas, incluso la Tierra, giraban en órbitas circulares alrededor del Sol .Aunque muchas de las afirmaciones de Copérnico no eran válidas la controversia provocada por su teoría heliocéntrica empujó a los astrónomos a buscar un modelo matemático que explicará los movimientos de los planetas y el Sol. El primero en hallarlo fue el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571 - 1630).Kepler descubrió que los planetas giran alrededor del Sol en órbitas elípticas, con el Sol colocado no en el centro sino en uno de los focos. El uso de las elipses para explicar el movimiento de los planetas es tan sólo una de sus diversas aplicaciones. Al igual que lo hicimos para la parábola vamos a definir la elipse como un lugar geométrico de puntos. En este caso usando dos puntos focales en vez de uno.

Definición

Una elipse es el conjunto de puntos $P(x, y) \in IR^2$ (lugar geométrico) cuya suma de distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 del plano (llamados focos) es constante. Llamaremos centro de la elipse, al punto medio entre los focos (ver figura 12)

La recta que pasa por los focos, corta a la elipse en dos puntos llamados vértices. La cuerda que une los vértices es el eje mayor de la elipse. La cuerda perpendicular al eje mayor y que pasa por el centro se llama eje menor de la elipse.

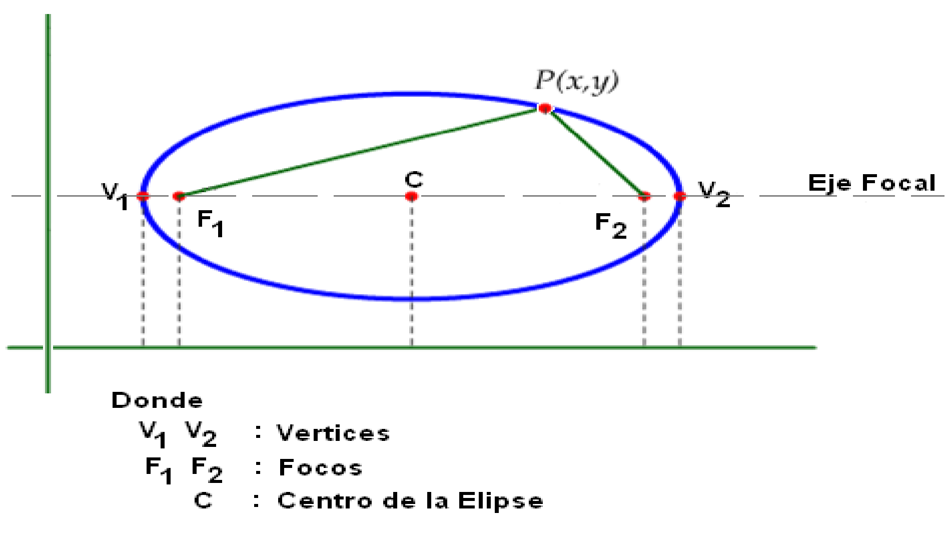


Figura 3 La Elipse

2.3 Forma canónica de la Elipse

2.3.1 Eje Focal Horizontal

Teorema

Sean $F_1(h-c,k)$, $F_2(h+c,k)$ focos de una elipse, $C(h,k)$ centro de la elipse, $d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$ y $h,k,c \in IR$, $c>0$, entonces la forma canónica de la ecuación de una elipse esta dada por

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Donde $a>c$, $a>b$ y $b^2=a^2-c^2$ (ver figura 13)

la ecuación canónica de la elipse

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-h)^2}{b^2}=1$$

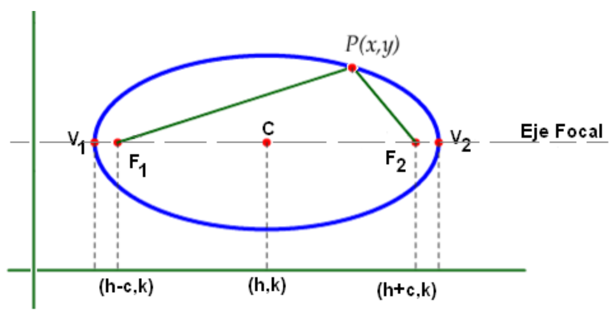


Figura 4 Elipse de eje focal Horizontal

2.3.2 Eje Focal vertical

Teorema

Sean $F_1(h,k-c)$, $F_2(h,k+c)$ focos de una elipse, $C(h,k)$ centro de la elipse, $d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$ y $h,k,c \in IR$, $c>0$, entonces la forma canónica de la ecuación de una elipse esta dada por

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Donde $a>c$, $a>b$ y $c^2=a^2-b^2$ (ver figura 14)

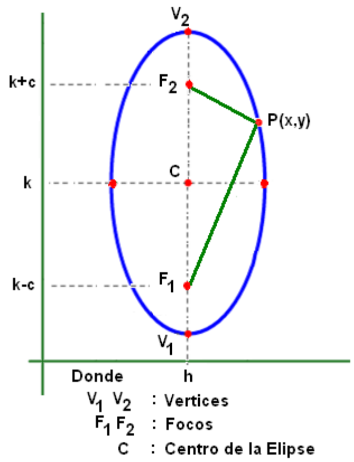


Figura 5 Elipse de eje focal Horizontal

Observación:

De la figura , podemos deducir que $d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$ (tomando $P=V_1$), es decir, $2a$ es la constante a la que se refiere la definición.

Los focos están en el eje mayor a c unidades del centro con $c^2=a^2-b^2$, y el eje mayor es horizontal.

2.4 Elipse centrada en el Origen

2.4.1 Eje Focal Horizontal

Toda elipse centrada en el origen y de eje focal horizontal es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Con $a>b$, $c^2=a^2-b^2$

2.4.2 Eje Focal Vertical

Toda elipse centrada en el origen y de eje focal horizontal es

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Con $a>b$, $c^2=a^2-b^2$

2.5 La excentricidad de una Elipse

La excentricidad es una medida de la "circularidad" de una elipse, entre más cerca de cero más circular y entre más cerca de uno más alargada.

Definición (excentricidad)

La excentricidad e de una elipse está dada por el cociente $e = \frac{c}{a}$

Observe que al estar situados los focos en el eje mayor entre el centro y los vértices, siempre se tiene que

$$0 < c < a \Rightarrow 0 < \frac{c}{a} < 1 \Rightarrow 0 < e < 1$$

Es decir, las elipses tienen una excentricidad menor a uno. Para una elipse casi circular, los focos están cerca del centro y $\frac{c}{a}$ es pequeño. Para una elipse alargada los focos están cerca de los vértices y $\frac{c}{a}$ es casi 1.

Esto explica la dificultad de los astrónomos en detectar las órbitas elípticas de los planetas, pues estas tienen los focos muy cerca de su centro, lo cual las hace casi circulares. La siguiente tabla muestra la excentricidad de las órbitas de los nueve planetas y la Luna.

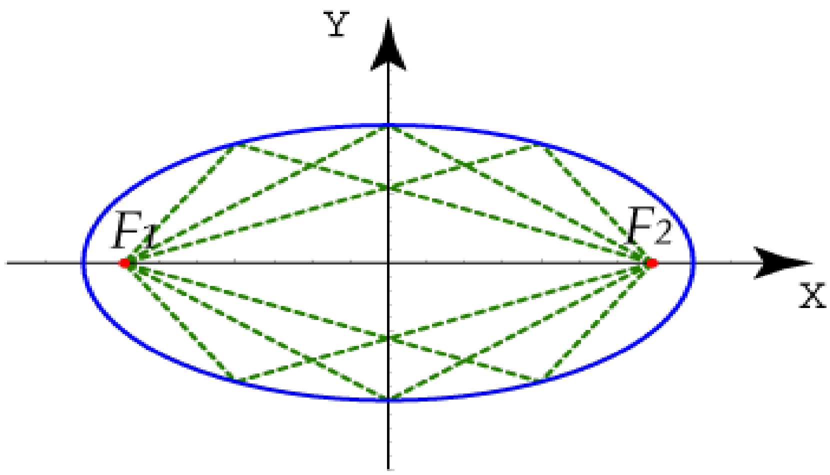
Mercurio	$e = 0.2056$	Saturno	$e = 0.00543$
Venus	$e = 0.0068$	Urano	$e = 0.0460$
Tierra	$e = 0.0167$	Neptuno	$e = 0.0082$
Marte	$e = 0.0934$	Plutón	$e = 0.2481$
Jupiter	$e = 0.0484$	Luna	$e = 0.0549$

Una de las propiedades geométricas más interesante de la elipse afirma que: un rayo que emana de uno de los focos de la elipse y se refleja en ella pasa por el otro foco; esta propiedad se conoce como la propiedad reflectora (figura 15)

Teorema (propiedad de reflexión)

La recta tangente a una elipse en un punto P forma ángulos iguales con las rectas que pasan por P y por alguno de los focos.

Figura 6 Propiedad Reflectora



4. La hiperbola

Las hipérbolas aparecen en muchas situaciones reales, por ejemplo, un avión que vuela a velocidad supersónica paralelamente a la superficie de la tierra, deja una huella acústica hiperbólica sobre la superficie. La intersección de una pared y el cono de luz que emana de una lámpara de mesa con pantalla troncocónica, es una hipérbola.

La definición de la hipérbola como lugar geométrico es similar a la dada para la elipse, como vemos en seguida

Definición

Una hipérbola es el conjunto de puntos $P(x, y) \in IR^2$ para los que la diferencia de sus distancias a dos puntos distintos prefijados (llamados focos) es, en valor absoluto, una constante.

La recta que pasa por los focos corta a la hipérbola en dos puntos llamados vértices. El segmento recto que une los vértices se llama eje transversal y su punto medio es el centro de la hipérbola. Un hecho distintivo de la hipérbola es que su gráfica tiene dos partes separadas, llamadas ramas.(ver figura 18)

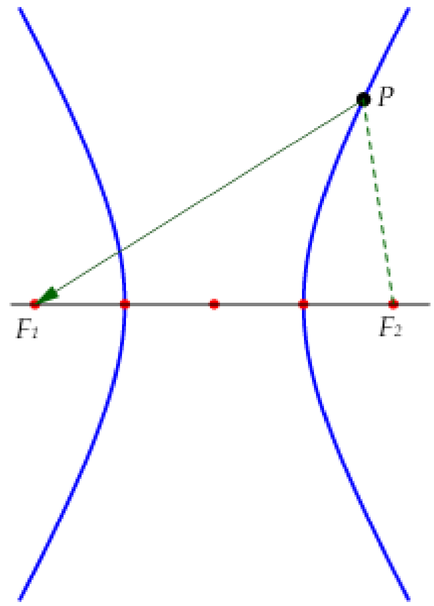


Figura 7 La Hipérbola

Teorema (ecuación canónica de la hipérbola)

La ecuación canónica de la hipérbola con centro en $C(h,k)$ es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

con eje transversal horizontal. Y

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

con eje transversal vertical. (ver figura 19)

Los vértices están a una distancia de a unidades del centro y los focos a una distancia de c unidades del centro. Además $b^2=c^2-a^2$

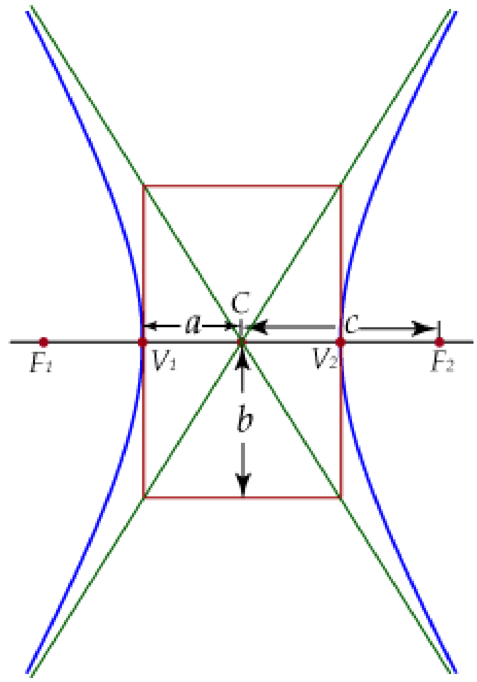


Figura 8

Resumiendo:

Si el eje transversal de la hipérbola es horizontal entonces

- El centro está en $C(h,k)$
- Los vértices están en $(h \pm a, k)$
- Los focos están en $(h \pm c, k)$.

Si el eje transversal de la hipérbola es vertical entonces

- El centro está en $C(h,k)$
- Los vértices están en $(h, k \pm a)$.
- Los focos están en $(h, k \pm c)$.

Una ayuda importante para trazar la gráfica de una hipérbola son sus asíntotas. Toda hipérbola tiene dos asíntotas que se intersecan en su centro y pasan por los vértices de un rectángulo de dimensiones ***2a*** y ***2b*** y centro en $C(h,k)$.El segmento recto de longitud ***2b*** que une $(h, k+b)$, $(h, k-b)$ se llama eje conjugado de la hipérbola. El siguiente teorema identifica la ecuación de las asíntotas.

Teorema (Asíntotas de una hipérbola)

Si la hipérbola tiene un eje transversal horizontal, las ecuaciones de las asíntotas son

$$y = k \pm \frac{b}{a}(x - h)$$

y si el eje transversal es vertical, las ecuaciones de las asíntotas son

$$y = k \pm \frac{a}{b}(x - h)$$

Observación:

Las asíntotas de la hipérbola coinciden con las diagonales del rectángulo de dimensiones $2a$ y $2b$ centro $C(h,k)$.Esto sugiere una forma simple de trazar tales asíntotas.

2.5.1 Excentricidad de una hipérbola

Definición (excentricidad de una hipérbola)

La excentricidad e de una hipérbola está dada por el cociente

$$e = \frac{c}{a}$$

Si la excentricidad es grande los focos están cerca del centro y las ramas de la hipérbola son casi rectas verticales. Si la excentricidad es cercana a uno los focos están lejos del centro y la ramas de la hipérbola son más puntiagudas.

2.6 Propiedad de reflexión

La propiedad reflectora de la hipérbola afirma que un rayo de luz dirigido a uno de los focos de una hipérbola se refleja hacia el otro foco (figura 20).

Teorema (propiedad de reflexión)

La tangente en un punto ***P*** de una hipérbola es la bisectriz del ángulo formado por lo segmentos que unen este punto con los focos.

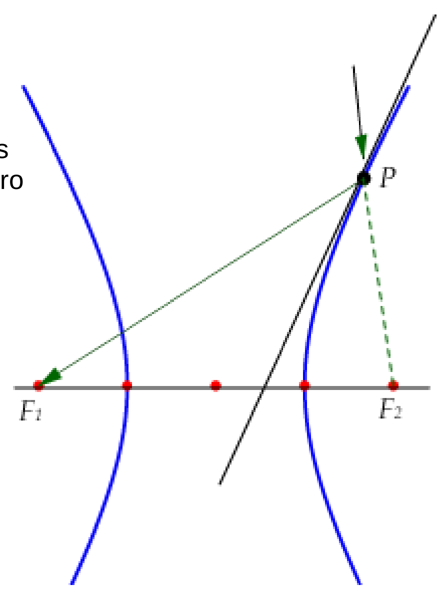


Figura 9

5. Ecuación de Segundo Grado

Como hemos visto la ecuación canónica de las secciones cónicas tiene la forma:

$$A\,x^2 + B\,xy + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$$

donde $A,\ B,\ C,\ D,\ E$ y F son constantes. Este tipo de ecuación se conoce como ecuaciones de segundo grado en xy. Otra manera de introducir las secciones cónicas es por medio de este tipo de ecuaciones, pues sus gráficas corresponden, en general, con las secciones cónicas estudiadas.

Definición

Una ecuación de la forma

$$A\,x^2 + B\,xy + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$$

donde $A,\ B,\ C,\ D,\ E$ y F son constantes, se conoce como ecuación de segundo grado en xy.

Observación: la gráfica de este tipo de ecuaciones corresponde a una sección cónica y la presencia del término mixto a se traduce en una rotación de ejes. Tema que se sale de los objetivos del presente curso y no será tratado en detalle, pero aún así, se presentará el teorema relacionado y un ejemplo.

Teorema (rotación de ejes)

La ecuación de segundo grado

$$A\,x^2 + B\,xy + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$$

puede reescribirse como

$$P\,u^2 + Q\,v^2 + R\,u + S\,v + T = 0$$

girando los ejes coordenados un ángulo θ, donde

$$Co\tan g(\theta) = \frac{A - C}{B}$$

Los coeficientes de la nueva ecuación se obtienen haciendo las sustituciones:

$$\begin{aligned} x &= u\cos\theta - v\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y &= u\,\mathrm{sen}\,\theta + v\cos\theta \end{aligned}$$

Definición (discriminante)

El discriminante de la ecuación de segundo grado (1) está dado por

$$D = B^2 - 4\,AC$$

El siguiente teorema nos permite clasificar las cónicas basándose en el signo del discriminante.

Teorema (secciones cónicas)

La gráfica de una ecuación de segundo grado $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ corresponde a, salvo casos degenerados, una sección cónica:

a.) Si $D < 0$, la gráfica es una elipse.

b.) Si $D = 0$, la gráfica es una parábola.

c.) Si $D > 0$, la gráfica es una hipérbola.