

DEFINICIÓN DE RAZÓN DE CAMBIO

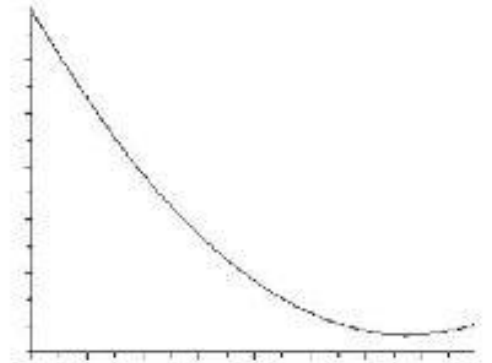
El concepto de **razón de cambio** se refiere a la medida en la cual una variable se **modifica** con relación a otra. Se trata de la magnitud que compara dos variables a partir de sus unidades de cambio. En caso de que las variables no estén relacionadas, tendrán una razón de cambio igual a cero.

La razón de cambio más frecuente es la velocidad, que se calcula dividiendo un trayecto recorrido por una unidad de tiempo. Esto quiere decir que la velocidad se entiende a partir del vínculo que se establece entre la **distancia** y el **tiempo**. De acuerdo a cómo se modifica la distancia recorrida en el tiempo por el movimiento de un cuerpo, podemos conocer cuál es su velocidad.

Supongamos que un automóvil recorre 100 kilómetros en dos horas. La razón de cambio existente entre ambas variables es **50 kilómetros por hora**. Ese valor representa su velocidad, ya que $v = d / t$ (velocidad = distancia / tiempo).

A partir del conocimiento de una razón de cambio, es posible desarrollar diferentes cálculos y previsiones. Si conocemos el nivel de contaminación que está llegando a un arroyo a partir del vertido de sustancias químicas por parte de una industria, es posible utilizar la razón de cambio para señalar qué tan rápido se incrementa el **nivel de contaminación**.

Con un cálculo similar, se puede calcular la velocidad de propagación de una epidemia en una determinada ciudad, tomando como datos la cantidad de personas que contrajo el virus en x días.



Razón de cambio promedio

Nuestro día a día nos enfrenta a diversas razones de cambio de situaciones sociales, económicas y naturales, entre otras, en las cuales deseamos saber cuál es el valor más grande o el más pequeño (el máximo y el mínimo, respectivamente), su crecimiento o su disminución en un período de **tiempo** determinado. Se trata de problemas en los cuales estudiamos fenómenos relacionados con la variación de una magnitud que depende de otra, por lo cual es necesaria una descripción y una cuantificación de dichos cambios por medio de gráficas, tablas y modelos matemáticos.

Así como en el ejemplo del coche que recorre 100 kilómetros en dos horas, los problemas que nos llevan a calcular la razón de cambio promedio arrojan **resultados** en los cuales se determina una variación que no necesariamente existe en la realidad a cada momento; en otras palabras, no sabemos si el coche ha mantenido esta velocidad a lo largo de las dos horas, sino que estimamos el promedio de unidades de distancia al cual debió avanzar para completar dicho recorrido.

Razón de cambio instantánea

La razón de cambio instantánea también se denomina *segunda derivada* y hace referencia a la velocidad con la cual cambia la pendiente de una **curva** en un momento determinado. No olvidemos que la razón de cambio muestra la proporción en la que cambia una variable con respecto a otra o, desde un punto de vista gráfico, la pendiente de una curva.

Si retomamos el ejemplo del coche, la razón de cambio instantánea podría resultar útil para conocer el trayecto recorrido en un punto específico de las dos horas, que es el plazo de tiempo total analizado en el **problema**. A diferencia de la razón promedio, la instantánea tiene una visión muy puntual, ya que busca conocer o corregir valores antes de que finalice el periodo.



Los cuatro pasos que enuncia la regla posibilitan trabajar las ideas de:

- **cambio, diferencia** (valor final menos valor inicial) tanto en la variable independiente como en la dependiente (*pasos 1 y 2*),
- **razón de cambio media** (al realizar el cociente entre los cambios, *paso 3*) y su asociación con la idea de pendiente de una recta secante a la gráfica de una función en dos puntos,
- **razón de cambio instantánea** (al realizar el cálculo del límite, *paso 4*) y la exploración de su relación con la idea de pendiente de una recta tangente a la gráfica de una función en un punto y la definición de derivada de una función en un punto.

Fase 1

Actividad 1. La **Regla de los cuatro pasos (RCP)** constituye una estructura matemática usada como *técnica* para trabajar con la función $y = f(x)$.

La técnica asume que, dada $y = f(x)$, se deben realizar los siguientes pasos:

Primer paso: Se calcula $f(x + \Delta x)$

Segundo paso: Se calcula $f(x + \Delta x) - f(x)$

Tercer paso: Se divide por Δx , quedando: $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Cuarto paso: Se aplica $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$, y se calcula el valor $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$,

siempre que el límite exista.

Explique con sus palabras qué es lo que está calculando en cada paso.

Primer paso:

Segundo paso:

Tercer paso:

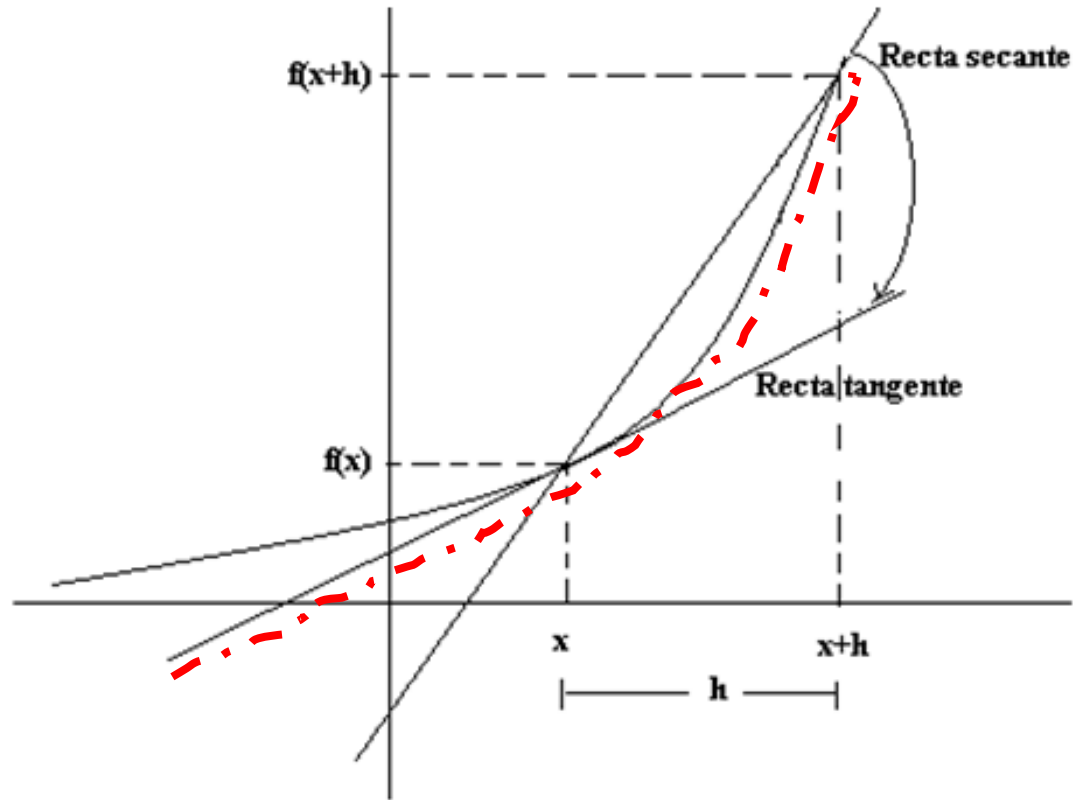
Cuarto paso:

¿Relaciona lo que calculó en el cuarto paso con algún contenido matemático estudiado?

PENDIENTE DE UNA RECTA TANGENTE

La pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(x, f(x))$ es:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

VELOCIDAD

La función $f(x)$ que describe el movimiento se conoce con el nombre de función posición del objeto. En el intervalo desde $t = a$ hasta $t = b$ el cambio de posición es $f(a + h) - f(a)$

La *velocidad promedio* en dicho intervalo es:

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{\text{desplazamiento}}{h} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

(donde h es la longitud del intervalo de tiempo (a, b))

La velocidad en el instante $t = a$ (Velocidad instantánea) es:

$$v(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

RAZONES DE CAMBIO

Dada $y = f(x)$ si x cambia de x_1 a x_2 entonces el cambio en x se llama incremento de x :

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

El correspondiente incremento de y es $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$

El cociente de estos incrementos se llama *Razón de cambio promedio* de y con respecto a x

$$\text{Razón de cambio promedio} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

La razón de cambio instantánea de y con respecto a x en el punto $(x_1, f(x_1))$ es:

$$\text{Razón de cambio instantáneo} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

PROPIEDADES DE LAS DERIVADAS

Derivada una función constante

$$f(x) = k \rightarrow f' = 0$$

Derivada de la función idéntica

$$f(x) = x \rightarrow f' = 1$$

Derivada de una suma de funciones

$$(f + g)' = f' + g'$$

Derivada de una diferencia de funciones

$$(f - g)' = f' - g'$$

Derivada de un producto de funciones

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Derivada de un cociente de funciones

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Derivada de una Potencia

$$f(x) = x^n \rightarrow f' = nx^{n-1}$$

Derivada de una Exponencial

$$f(x) = e^x \rightarrow f' = e^x$$