



**IE DIVERSIFICADO DE CHIA**  
**DEFINICION EJERCICIOS Y EJEMPLOS DE SUSCESIONES Y LIMITES DE**  
**SUCESIONES**

Chía,

Señores Estudiantes de grados UNDECIMOS, a continuación, encontrarán una serie de definiciones ejemplos y ejercicios bajados de internet y los cuales se realizarán de acuerdo a lo que se indique en cada curso. Este documento es solo como guía y los ejercicios que deben realizar se los indicaran en el aula de clase cada uno de los docentes del área

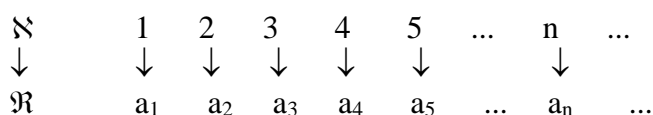
Cordialmente

Docentes de Matemáticas

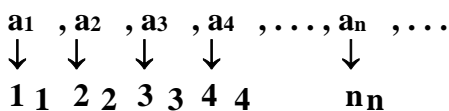
## SUCESIONES.

**Sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de números naturales y cuyo recorrido es un subconjunto de los números reales.**

Una sucesión de números reales es una ley (función) que hace corresponder a cada número natural un número real.



Se acostumbra representar la sucesión por sus imágenes :



Los números naturales 1,2,3,4,... n se llaman **índices**. Los números reales  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$  se llaman **términos**. Al término  $a_n$  se le llama **término general**.

Ejemplo	n	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	a <sub>4</sub>	a <sub>5</sub>	a <sub>n</sub>
Ejemplo 1	1	1	3	5	7	9	2n-1
Ejemplo 2	2	2	4	6	8	10	2n
Ejemplo 3	1	1	4	9	16	25	n <sup>2</sup>
Ejemplo 4	1	1	-2	3	-4	5	(-1) <sup>n+1</sup> n

### EJERCICIOS :

6. Escribe los primeros cinco términos de la sucesión

a) $\frac{1}{2n+1}$	b) $\frac{(-1)^n}{n}$	c) $\frac{1}{2n-1}$	d) $n^n$
e) $n^2 + (-1)^n n$	f) $\frac{n-1}{2n}$	g) $\frac{n}{n^2 + n + 1}$	h) $\frac{n^2 + 1}{n^2 - 1}$
i) $\frac{3n}{4n+2}$	j) $n^2 + 3n + 1$	k) $\frac{2^n}{2^{n+1}}$	l) $\frac{2n-1}{3n+2}$
m) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$	n) $2^{n+2}$	o) $\frac{n}{3^{n-1}}$	p) $1 + (-1)^{n+1}$

7. Determina el término general de cada sucesión:

Ejercicios	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	a <sub>4</sub>	a <sub>5</sub>	a <sub>n</sub>
Ejercicio 1	1	8	27	64	125	
Ejercicio 2	1	4	9	16	25	
Ejercicio 3	-1	1	-1	1	-1	
Ejercicio 4	2	5	10	17	26	
Ejercicio 5	2	12	30	56	90	
Ejercicio 6	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	



**IE DIVERSIFICADO DE CHIA**  
**DEFINICION EJERCICIOS Y EJEMPLOS DE SUSCESIONES Y LIMITES DE**  
**SUCESIONES**

<b>Ejercicio 7</b>	<b>4</b>	<b>7</b>	<b>10</b>	<b>13</b>	<b>16</b>			
<b>Ejercicio 8</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{3}$			
<b>Ejercicio 9</b>	<b>-1</b>	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{5}$			

**IV. MONOTONIA.**

Una sucesión  $(a_n)$  es monótona creciente cuando cada término es menor o igual que el término siguiente, es decir,  $a_n \leq a_{n+1}$ , cualesquiera que sea el número natural  $n$ .

**Ejemplo, la sucesión siguiente es monótona creciente :**

**1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5 . . .**

Una sucesión  $(a_n)$  es estrictamente creciente si es monótona creciente y todos sus términos son distintos., es decir,  $a_n < a_{n+1}$ , cualesquiera que sea el número natural  $n$ .

**Ejemplo, la sucesión siguiente es estrictamente creciente :**

**1, 3, 5, 7, 9, . . .**

sucesión suma  $c_n = \frac{n^3}{(n+1)^2}$

**EJERCICIOS.**

**9. Se dan las siguientes sucesiones :**

$$a_n = \frac{3+2n}{n}$$

$$b_n = \frac{n^2-1}{n}$$

$$c_n = \frac{2n+3}{n+1}$$

**realiza las siguientes operaciones :**

<b>a) <math>(a_n) + (b_n) =</math></b>	<b>b) <math>(b_n) - (c_n) =</math></b>	<b>c) <math>(a_n) \cdot (c_n) =</math></b>
--	--	--

<p><b>10. Si <math>a_n = 2n + 3</math> y <math>b_n = 3n - 1</math></b>  <b>encuentra los 5 primeros términos de la sucesión</b></p> <p>a) <math>a_n + b_n</math>  b) <math>a_n \cdot b_n =</math></p>	<p><b>11. Si <math>a_n = \frac{2n+1}{n}</math> y <math>b_n = \frac{n-1}{n+1}</math></b>  <b>encuentra los 5 primeros términos de la sucesión</b></p> <p>a) <math>a_n + b_n</math>  b) <math>a_n \cdot b_n =</math></p>	<p><b>11 . Si <math>a_n = \frac{n^2-1}{n}</math> y <math>b_n = \frac{n}{n+1}</math></b>  <b>encuentra los 5 primeros términos de la sucesión</b></p> <p>a) <math>a_n + b_n</math>  b) <math>a_n \cdot b_n =</math></p>
---	--	--



**IE DIVERSIFICADO DE CHIA**  
**DEFINICION EJERCICIOS Y EJEMPLOS DE SUSCESIONES Y LIMITES DE**  
**SUCESIONES**

Una sucesión  $(a_n)$  es monótona decreciente cuando cada término es mayor o igual que el término siguiente, es decir,  $a_n \geq a_{n+1}$ , cualesquiera que sea el número natural  $n$ .

$n$   
**Ejemplo, la sucesión siguiente es monótona decreciente :**

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

Una sucesión  $(a_n)$  es estrictamente decreciente si es monótona decreciente y todos sus términos son distintos., es decir,

$a_n > a_{n+1}$ , , cualesquiera que sea el número

**Ejemplo, la sucesión siguiente es estrictamente decreciente :**

$$-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, \dots$$

**8. Demuestra a que tipo pertenecen las siguientes sucesiones :**

a)  $1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \dots$

b)  $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \dots$

c)  $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \dots$

**VI. OPERACIONES CON SUCCIONES.**

**a) PRODUCTO DE UNA SUCCESIÓN POR UN NUMERO.**

La sucesión  $(k \cdot a_n)$  se llama sucesión producto de un número real  $k$  por la sucesión  $(a_n)$ . Su término general se obtiene multiplicando el término general de  $(a_n)$  por el número real  $k$ .

**Ejemplo, Si la sucesión de término general  $(n^2)$  se multiplica por 2, el término de orden general será  $(2n^2)$ .**

**b) SUMA DE SUCCIONES.**

La sucesión  $(c_n)$  se llama sucesión suma de las sucesiones  $(a_n)$  y  $(b_n)$  Su término general se obtiene sumando los términos generales  $(a_n)$  y  $(b_n)$

**Ejemplo. Si las sucesiones de términos general  $a_n = \frac{n^2}{n+1}$  y  $b_n = \frac{n}{n+1}$**

**se suman**  $\frac{n^2}{n+1} + \frac{n}{n+1} = \frac{n^2 + n}{n+1} = \frac{n(n+1)}{n+1} = n$

**o sea , la sucesión suma  $c_n = n$**

**c) SUCCESION PRODUCTO.**

La sucesión  $(c_n)$  se llama sucesión producto de las sucesiones  $(a_n)$  y  $(b_n)$  Su término general se obtiene multiplicando los términos generales  $(a_n)$  y  $(b_n)$

**Ejemplo. Si las sucesiones de términos general  $a_n = \frac{n^2}{n+1}$  y  $b_n = \frac{n}{n+1}$**

**se multiplican**  $\frac{n^2}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{n^3}{(n+1)^2}$  **o sea , la s sucesiones :**



**IE DIVERSIFICADO DE CHIA**  
**DEFINICION EJERCICIOS Y EJEMPLOS DE SUSCESIONES Y LIMITES DE**  
**SUCESIONES**

$$a_n = \frac{3+2n}{n}$$

$$b_n = \frac{n^2-1}{n}$$

$$c_n = \frac{2n+3}{n+1}$$

realiza las siguientes operaciones :

a) $(a_n) + (b_n) =$	b) $(b_n) - (c_n) =$	c) $(a_n) \cdot (c_n) =$
----------------------	----------------------	--------------------------

<p><b>10. Si <math>a_n = 2n + 3</math> y <math>b_n = 3n - 1</math></b>  <b>encuentra los 5 primeros términos de la sucesión</b></p> <p>a) <math>a_n + b_n</math>  b) <math>a_n \cdot b_n =</math></p>	<p><b>11. Si <math>a_n = \frac{2n+1}{n}</math> y <math>b_n = \frac{n-1}{n+1}</math></b>  <b>encuentra los 5 primeros términos de la sucesión</b></p> <p>a) <math>a_n + b_n</math>  b) <math>a_n \cdot b_n =</math></p>	<p><b>11 . Si <math>a_n = \frac{n^2-1}{n}</math> y <math>b_n = \frac{n}{n+1}</math></b>  <b>encuentra los 5 primeros términos de la sucesión</b></p> <p>a) <math>a_n + b_n</math>  b) <math>a_n \cdot b_n =</math></p>
---	--	--

**LIMITE DE UNA SUCESION.**

Sea la sucesión con término general  $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$

A medida que  $n$  se hace cada vez mayor, la diferencia entre el término  $a_n$  y el límite 2 se hace cada vez menor.

¿ A partir de qué término la diferencia es menor que una centésima ?

$$\left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| < \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{n+1} \right| < \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow n > 99$$

¿ A partir de qué término la diferencia  $a_n - 2$  son menores que un milésimo ?

Haciendo el mismo proceso anterior , llegaríamos a que  $n > 999$

**UNA SUCESIÓN DE NÚMEROS REALES ( $a_n$ ) TIENE POR LÍMITE EL NÚMERO REAL  $a$ , CUANDO PARA TODO NÚMERO REAL POSITIVO  $\varepsilon$  EXISTE UN NÚMERO NATURAL  $n^*$ , TAL QUE PARA TODO  $n > n^*$  SE VERIFICA QUE :**

$$\left| a_n - a \right| < \varepsilon$$

**SE SIMBOLIZA ASÍ :**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$



## IE DIVERSIFICADO DE CHIA

### DEFINICION EJERCICIOS Y EJEMPLOS DE SUSCESIONES Y LIMITES DE SUSCESIONES

Las sucesiones que tienen límite real se denominan sucesiones convergentes.

### LÍMITE DE UNA SUSCESIÓN

Consideremos la sucesión

$$[a_n] = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots$$

Si  $n = 100$  entonces el término que le corresponde es  $\frac{99}{100} = 0,99$

Si  $n = 1000$  entonces el término que le corresponde es  $\frac{999}{1000} = 0,999$

Si  $n = 1000000$  entonces el término que le corresponde es  $\frac{999999}{1000000} = 0,999999$

Tú puedes comprobar intuitivamente que el número se acerca cada vez más a 1, pero nunca llega a ser igual a 1, por lo que diremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$$

### OPERACIONES CON SUSCESIONES CONVERGENTES.

Si las sucesiones  $(a_n)$  y  $(b_n)$  tienen límite finito, se pueden realizar las siguientes operaciones :

**ADICION**      suma       $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$

opuesto       $\lim (-a_n) = - \lim a_n$

diferencia       $\lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$

**MULTIPLICACIÓN**      producto       $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$

recíproco       $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim b_n}$

cuociente       $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$

**CONSTANTE**      producto por k       $\lim (k \cdot a_n) = k \lim a_n$

### ENTORNO DEL LIMITE.

El número real  $a$  es el límite de la sucesión  $a_n$  si **para todo real positivo** suficientemente pequeño, existe un valor  $n_0$  correspondiente al término  $a_{n_0}$  de la sucesión, a partir del cuál todos los términos siguientes están en el entorno  $|a-\varepsilon, a+\varepsilon|$  del punto  $a$ .

El número real  $a$  es el límite de la sucesión  $a_n$  sí y sólo sí para cualquier número real positivo  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, existe un número natural  $n_0$ , tal que  $\forall n > n_0$  se cumple que  $|a_n - a| < \varepsilon$

Es decir :

$$\lim a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 ; \exists n \in \mathbb{N} / |a_n - a| < \varepsilon, \forall n > n_0$$



**IE DIVERSIFICADO DE CHIA**  
**DEFINICION EJERCICIOS Y EJEMPLOS DE SUSCESIONES Y LIMITES DE**  
**SUSCESIONES**



**Toda sucesión que tiene límite se dice que es convergente.**

**El límite de una sucesión es un número real único.**

**Ejemplo :**

$$\lim \frac{n^2 + n}{n} = \lim \left( \frac{\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2}}{\frac{n}{n^2}} \right) = \lim \left( \frac{1 + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right) = \frac{\lim 1 + \lim \frac{1}{n}}{\lim \frac{1}{n}} = \frac{1 + 0}{0} =$$

**6. Escribe los primeros cinco términos de la sucesión**

a) $\frac{1}{2n+1}$	b) $\frac{(-1)^n}{n}$	c) $\frac{1}{2n-1}$	d) $n^n$
e) $n^2 + (-1)^n n$	f) $\frac{n-1}{2n}$	g) $\frac{n}{n^2 + n + 1}$	h) $\frac{n^2 + 1}{n^2 - 1}$
i) $\frac{3n}{4n+2}$	j) $n^2 + 3n + 1$	k) $\frac{2^n}{2^{n+1}}$	l) $\frac{2n-1}{3n+2}$
m) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$	n) $2^{n+2}$	o) $\frac{n}{3^{n-1}}$	p) $1 + (-1)^{n+1}$

1. Determina si cada sucesión es **creciente** o **decreciente**; es **convergente** o **divergente** y determina el límite de ellas cuando n tiende a infinito

$a_n = \frac{2n}{n+1}$	$a_n = \frac{n+1}{n+2}$	$a_n = \frac{n+2}{3}$	$a_n = \frac{n-1}{2n^2-1}$
$a_n = \frac{2n+1}{n+3}$	$a_n = \frac{1}{2n+1}$	$a_n = \frac{2n-1}{n+1}$	$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2^n}$
$a_n = \frac{2}{n} - 2$	$a_n = 4 + \frac{1}{n}$	$a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$	$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
$a_n = \frac{1}{n}$	$a_n = \frac{4n+1}{2n}$	$a_n = 2 + \frac{1}{n+1}$	$a_n = \frac{2n^2-1}{2n}$

## SUMATORIA DE LOS TÉRMINOS DE UNA SUCESIÓN.

**OBJETIVO :**

Reconocer, comprender y aplicar la notación de sumatoria y sus propiedades.

**CONTENIDOS :**

Sumatoria : concepto y propiedades.  
 Sumatoria de sucesiones de números reales.



## IE DIVERSIFICADO DE CHIA

### DEFINICION EJERCICIOS Y EJEMPLOS DE SUSCESIONES Y LIMITES DE SUCESIONES

Sumatoria de una sucesión es la forma abreviada de escribir sus términos como sumandos.

**Ejemplo 1** :  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = \sum_{k=1}^n x_k$

**Ejemplo 2** :  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2$

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$$

### PROPIEDADES :

1. Suma de una constante :

$$\sum_{k=1}^n c_k = n \cdot c$$

2. Sumatoria del producto de una constante por los términos de una sucesión :

$$\sum_{k=1}^n c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^n a_k$$

3. Sumatoria de la suma o diferencia de dos sucesiones :

$$\sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k$$

4. Sumatoria de los n primeros números naturales :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

5. Sumatoria de los n primeros números impares :

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

6. Sumatoria de los cuadrados de los n primeros números naturales :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

7. Sumatoria de los cubos de los n primeros números naturales :

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$



**IE DIVERSIFICADO DE CHIA**  
**DEFINICION EJERCICIOS Y EJEMPLOS DE SUSCESIONES Y LIMITES DE**  
**SUCESIONES**

**EJERCICIOS RESUELTOS :**

$$1. \sum_{k=1}^n (k-1)(k+1) = \sum_{k=1}^n k^2 - 1 = \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n$$

2.  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \dots$  n términos

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n k^2 + k = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \dots$$

**EJERCICIOS POR RESOLVER**

1.  $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots$  n términos

2. $\sum_{k=1}^7 \frac{k(k+1)}{2}$	3. $\sum_{k=1}^6 \frac{k}{(k+1)^2}$	4. $\sum_{k=1}^8 \frac{(-1)^k (k^2 + 1)}{4k}$
------------------------------------	-------------------------------------	---

5. $\sum_{k=1}^5 (-1)^k \cdot k$	6. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$	7. $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot (k^2 + 1)$
----------------------------------	----------------------------------	--

**Expresa como sumatoria :**

8. $1^2 + 2^3 + 3^4 + \dots$	9. $2 + 5 + 8 + \dots + 44$
10. $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \dots + 10 \cdot 19$	10. $1 + 4 + 7 + \dots + 43$
12. $3 + 5 + 7 + 9 + \dots$	13. $1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 7$
14. $\frac{-1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$	15. $1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{27}$

**Aplica propiedades y calcula :**

16. $\sum_{k=1}^{10} 7(k^3 + 1)$	17. $\sum_{k=11}^{20} (k^2 + 2)(k - 2)$
----------------------------------	---

**Calcula la sumatoria de :**

18. $\sum_{k=1}^{40} k$	19. $\sum_{k=1}^{30} (2k - 1)$
20. $\sum_{k=1}^{63} k^2$	21. $\sum_{k=1}^{70} (k^2 + k)$





**IE DIVERSIFICADO DE CHIA**  
**DEFINICION EJERCICIOS Y EJEMPLOS DE SUSCESIONES Y LIMITES DE**  
**SUCESIONES**

Usa las fórmulas conocidas para el cálculo de :

22. $\sum_{k=1}^n 2k$	23. $\sum_{k=1}^n (3k - 2)$
24. $\sum_{k=1}^n (2k - 1)^2$	25. $\sum_{k=1}^n (k + 1)^2$

**OBJETIVO:**

**INTERPRETAR EL CONCEPTO DE FACTORIAL.**

**CONTENIDOS**

Factorial

**FACTORIAL.**

**DEFINICIÓN**      $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$

Es decir, n factorial es el producto de los n primeros números naturales.

$1! = 1$

$0! = 1$

$n! = n \cdot (n-1)!$

**EJERCICIO RESUELTO**

Ejemplo 1 :  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

**EJERCICIOS POR RESOLVER**

1. Simplificar    a)  $\frac{15!}{13! \cdot 2!} =$             b)  $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$             c)  $\frac{(x+6)!}{(x+4)!}$

2. Expresa en forma factorial : a)  $13 \cdot 12 \cdot 11$             b)  $\frac{1}{25 \cdot 24}$

3. Es verdadera la igualdad      $\frac{2! + 3! + 4!}{16} = 2!$

**OBJETIVO**

**CONOCER Y APLICAR EL CONCEPTO DE COEFICIENTE BINÓMICO**

**CONTENIDO**

**COEFICIENTE BINÓMICO**

**COEFICIENTE BINOMICO.**





**IE DIVERSIFICADO DE CHIA**  
**DEFINICION EJERCICIOS Y EJEMPLOS DE SUSCESIONES Y LIMITES DE**  
**SUCESIONES**

**DEFINICIÓN :** 
$$\binom{n}{r} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (r-1) \cdot r}$$

$$\binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b! \cdot (a-b)!}$$

**EJERCICIO RESUELTO**

Ejemplo 1.

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

**EJERCICIOS POR RESOLVER :**

¿Es verdadera cada proposición ?:

4)  $\binom{7}{4} + \binom{7}{5} = \binom{8}{4}$       5)  $\binom{5}{3} + 2\binom{5}{4} + \binom{5}{5} = \binom{7}{5}$

6)  $\binom{-1}{2} = 4$       7)  $\binom{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$       8)  $2^4 = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$

9. Simplifica  $\frac{\binom{16}{1} + \binom{16}{2}}{\binom{17}{14} + \binom{17}{15}} =$

10 Determina el valor de x en :  $\binom{x}{1} + 2\binom{x}{2} + \binom{x}{3} = 20$

11.  $\binom{n+1}{n} : \binom{n}{n-1} =$       12.  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} =$

Demuestra si existe igualdad en :

13.  $\binom{n+1}{n-1} : \binom{n}{n-2} = \frac{n+1}{n-1}$

16. Resuelve la ecuación :  $\binom{35}{x} = \binom{35}{x+7}$

17. El valor de x en :  $\binom{12}{7} = \binom{12}{5} + \binom{12}{x}$



**IE DIVERSIFICADO DE CHIA**  
**DEFINICION EJERCICIOS Y EJEMPLOS DE SUSCESIONES Y LIMITES DE**  
**SUCESIONES**

OBJETIVO :

**DEDUCIR EL TEOREMA DEL BINOMIO.**

CONTENIDO

**TEOREMA DEL BINOMIO**

## TEOREMA DEL BINOMIO.

Los coeficientes de las potencias de  $(a + b)$  se organizan de acuerdo al triángulo de Pascal :

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

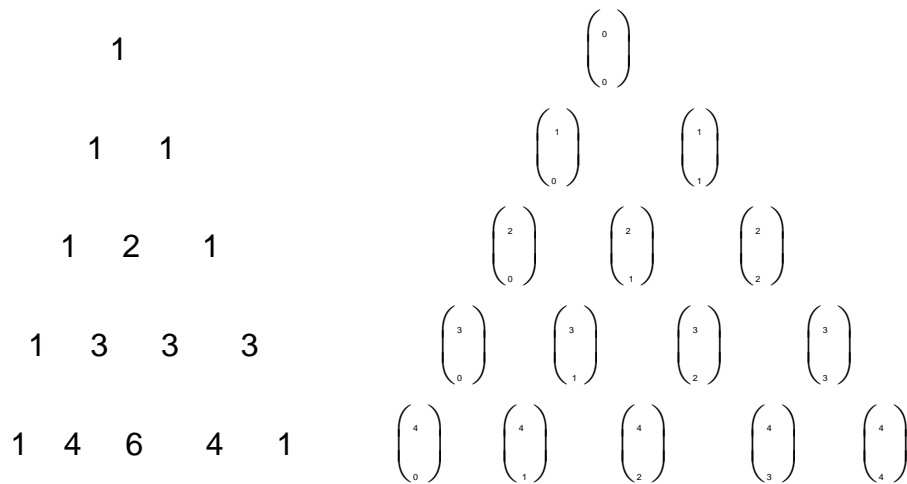
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

.....

se obtienen sólo los coeficientes



.....

entonces se puede obtener el desarrollo de un binomio elevado a la potencia  $n$

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

o también 
$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$



**IE DIVERSIFICADO DE CHIA**  
**DEFINICION EJERCICIOS Y EJEMPLOS DE SUSCESIONES Y LIMITES DE**  
**SUCESIONES**

**EJERCICIOS RESUELTO :**

$$(x - 2y)^5 =$$

$$\binom{5}{0}x^5(-2y)^0 + \binom{5}{1}x^4(-2y)^1 + \binom{5}{2}x^3(-2y)^2 + \binom{5}{3}x^2(-2y)^3 + \binom{5}{4}x^1(-2y)^4 +$$

$$\binom{5}{5}x^0(-2y)^5 =$$

$$x^5 + 5 \cdot x^4 \cdot (-2y) + 10 \cdot x^3 \cdot 4y^2 + 10 \cdot x^2 \cdot (-8y^3) + 5 \cdot x \cdot 16y^4 + (-32y^5) =$$

$$x^5 - 10x^4y + 40x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 - 32y^5$$

**EJERCICIOS POR RESOLVER**

19. Desarrolla cada uno de los siguientes binomios :

a)  $(x - y)^5$

b)  $(2x - 3y)^4$

c)  $(2 - 3ab)^5$

d)  $\left(\frac{3}{2}x + \frac{2}{5}y\right)^4$

e)  $\left(\frac{3}{2}a + \frac{2}{5}b^2\right)^3$

f)  $(3p - q)^5 =$

Para determinar el término de orden **p**

$$t_p = \binom{n}{p-1} a^{n-(p-1)} n^{p-1}$$

20. Encuentra :

a) el sexto término de  $(x+y)^{15}$

b) el quinto término de  $(a-b)^9$

c) el cuarto término de  $(x^2 - y^2)^{11}$

d) el noveno término de  $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{x}\right)^{12}$

## **PROGRESIÓN ARITMÉTICA.**

**OBJETIVOS :**

**Aplicar los conceptos y las propiedades de las progresiones aritméticas.**

**CONTENIDOS :**

**Una progresión aritmética (P.A.) es una secuencia de números relacionados de tal manera que cada uno, después del primero, se pueden obtener del que le precede sumando a éste una cantidad fija llamada diferencia común.**

**$a_1$  = primer término de la P.A.**

**$d$  = diferencia común de la P.A.**

**$a_n$  = término enésimo ( último ) de la P.A.**

**$n$  = números de términos de la P.A.**

**$S_n$  = suma de los  $n$  términos de la P.A.**



**IE DIVERSIFICADO DE CHIA**  
**DEFINICION EJERCICIOS Y EJEMPLOS DE SUSCESIONES Y LIMITES DE**  
**SUCESIONES**

**FÓRMULAS :**

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \qquad d = a_n - a_{n-1} \qquad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

**EJERCICIOS :**

1. Escribe los  $n$  primeros términos de la P.A. siguiente, cuyos datos son :

a) $a_1 = 3 ; d = 3 ; n = 5$	b) $a_1 = -1 ; d = 2 ; n = 7$
c) $a_1 = -5 ; a_3 = -1 ; n = 6$	d) $a_6 = 2 ; a_2 = 11 ; n = 6$

2. Encuentra la suma de los términos de la P.A. de acuerdo a los siguientes datos :

a) $a_1 = 6 ; d = 3 ; n = 5$	b) $a_1 = -8 ; d = 3 ; n = 11$
c) $a_1 = -3 ; a_n = 9 ; n = 7$	d) $a_1 = 1 ; a_n = 7 ; n = 8$

3. De las variables,  $a_1 ; a_n ; n ; d ; S$  ; encuantra las que faltan en cada una de las siguientes agrupaciones :

a) $a_1 = 2 ; d = -0,5 ; n = 8$	b) $a_n = -11 ; S = -32 ; n = 8$
c) $a_1 = 4 ; n = 11 ; S = -11$	d) $a_n = 1 ; d = -1 ; S = 78$

4. Calcula el término de orden 14 en una P.A. si el primer término es 5 y la diferencia es 4.

5. El undécimo término de una P.A. es 49 y su diferencia es 4. Encuentra el primer y el octavo término.

6. Encuentra la P.A. cuyo quinto término es 14 y el décimo término es 29.

7. Interpola cinco términos entre 3 y 6.

8. Hallar tres números que están en P.A. sabiendo que la suma del primer y del tercer término es 44 y el producto del segundo por el primer término es 418.

9. Encuentra la suma de los 100 primeros múltiplos de tres.

10. Se dan las siguientes P.A. encuentra el término que se indica :

5, 8,, 11, 14 ...  $a_{10}$

5, 2, -1, -4, ...  $a_{15}$





**IE DIVERSIFICADO DE CHIA**  
**DEFINICION EJERCICIOS Y EJEMPLOS DE SUSCESIONES Y LIMITES DE**  
**SUCESIONES**

3	3 · 4 = 12	12 · 4 = 48	48 · 4 = 192	192 · 4 = 768
---	------------	-------------	--------------	---------------

Es decir, la P.G. es 3, 12, 48, 192, 768, ...

**Fórmulas :**

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$	$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$	$S = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$
---------------------------	---------------------------	------------------------------

**EJERCICIOS :**

<b>1.</b>	<p>Escribe los “n” primeros términos de la P.G. de acuerdo a los siguientes datos :</p> <p>a) <math>a_1 = 3 ; r = 3 ; n = 6</math>  b) <math>a_1 = -4 ; r = 3 ; n = 4</math>  c) <math>a_1 = 8 ; a_2 = 4 ; n = 6</math>  d) <math>a_2 = 1 ; a_5 = 125 ; n = 5</math></p>
<b>2.</b>	<p>Encuentra el término de orden “n” en las siguientes P.G.</p> <p>a) <math>a_1 = 2 ; r = 2 ; n = 5</math>  b) <math>a_1 = 625 ; r = 0,2 ; n = 6</math>  c) <math>a_1 = 343 ; r = \frac{1}{7} ; n = 5</math></p>
<b>3.</b>	<p>Encuentra la suma de los términos que se indican en cada P.G. :</p> <p>a) <math>a_1 = 1 ; r = 2 ; n = 5</math>  b) <math>a_1 = 125 ; r = 0,2 ; a_n = 0,2</math>  c) <math>a_1 = \frac{1}{2} ; r = 2 ; n = 7</math>  d) <math>a_1 = 81 ; r = \frac{1}{3} ; n = 6</math></p>
<b>4.</b>	<p>Encuentra las variables faltantes entre S, <math>a_1</math>, <math>a_n</math>, r, n en las siguientes P.G. :</p> <p>a) <math>a_n = 27 ; r = 3 ; n = 6</math>  b) <math>a_n = 1 ; r = \frac{1}{2} ; S = 511</math>  c) <math>a_n = 1 ; r = 0,2 ; n = 5</math>  d) <math>a_1 = 256 ; n = 3 ; S = 256</math></p>
<b>5.</b>	<p>Halla el quinto término y la suma de los diez primeros términos de la P.G. :  8, 4, 2, ....</p>
<b>6.</b>	<p>El segundo término de una P.G. es <math>\frac{4}{3}</math> y el quinto es <math>\frac{32}{3}</math>. Encuentra el octavo término.</p>
<b>7.</b>	<p>En una P.G. el primer término es 23 y la razón es 2. ¿ Cuántos términos se deben sumar para que el resultado sea 1449 ?</p>
<b>8.</b>	<p>Gonzalo gana \$ 1. El primer día de trabajo, \$ 2 el segundo día, \$ 4 el tercer día, \$ 8 el cuarto día. ¿ Cuánto habrá ganado al cabo de 20 días de trabajo ?</p>
<b>9.</b>	<p>Encuentra los cinco primeros términos de una P.G. de modo que el primero sea 2 y el segundo 3.</p>
<b>10.</b>	<p>Interpola dos medios geométricos entre a y b.</p>
<b>11.</b>	<p>Determina cuántos términos tiene la P.G. cuyo primer término es 2 y cuyo último término es 512 si su suma es 682.</p>



**IE DIVERSIFICADO DE CHIA**  
**DEFINICION EJERCICIOS Y EJEMPLOS DE SUSCESIONES Y LIMITES DE**  
**SUCESIONES**

12.	Se sabe que una determinada bacteria se reproduce por bipartición cada 20 minutos, es decir de cada bacteria aparecen 2 cada 20 minutos. ¿ Cuántas bacterias habrán pasadas 10 horas desde que se detectó la primera ?
-----	--

**XI. PROGRESIÓN GEOMÉTRICA INFINITA.**

Si  $n \rightarrow \infty$  y  $|r| > 1$  entonces  $S = \frac{a_1}{1-r}$

1.	Encuentra la suma de a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$ B) $a_1 = 5 ; r = \frac{3}{5}$ c) $a_1 = 4 ; a_2 = 2,4$ d) $a_1 = 4 ; a_4 = \frac{4}{125}$ e) $a_2 = 64 ; a_4 = 4$
2.	Si una pelota rebota tres cuartos de la distancia recorrida en su caída. Calcula la distancia real que recorrerá antes de alcanzar su estado de reposo si se ha dejado caer desde 2,6 metros.
3.	Una bicicleta baja una pendiente frenando de tal modo que cada segundo recorre tres cuartos de distancia recorrida en el segundo anterior. Calcula el espacio recorrido hasta detenerse si avanzó 5 metros en el primer segundo.
4.	Un niño recibe \$ 5000 durante el primer año de vida de un fondo que le asegura un ingreso anual igual a la mitad del valor recibido el año anterior. Calcula el valor aproximado que llegará a recibir hasta que su primer nieto esté en segundo año básico.
	Se tiene un cuadrado de lado "a". Se inscribe en él un cuadrado uniendo los puntos medios de los lados del cuadrado original y así se van inscribiendo cuadrados cada vez más chicos. Calcular la suma de las áreas y de los perímetros de los infinitos cuadrados así obtenidos.

**INDUCCCIÓN MATEMÁTICA.**

**OBJETIVO :** Demostrar la validez de proposiciones y fórmulas mediante el principio de Inducción Matemática.

**CONTENIDOS :** El Principio de Inducción completa es una proposición "q" expresada en términos de una variable "k" que cumple :

- 1) es verdadera si  $k = 1$
- 2) a partir de que  $k = p$  se deduce que también es válida para  $K 0 p+1$  entonces dicha proposición "q" es válida para cualquier número natural.

Para llegar a una generalización se debe examinar un cierto número de casos particulares para descubrir la forma en que están relacionados. Una vez que se encuentra la mencionada relación se constituye en generalización o ley. Es decir se trabaja de lo particular a lo general, lo que forma el método de la lógica llamado inducción.

**EJERCICIOS :**

Demuestra las siguientes proposiciones por medio de inducción :

1)  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$





**IE DIVERSIFICADO DE CHIA**  
**DEFINICION EJERCICIOS Y EJEMPLOS DE SUSCESIONES Y LIMITES DE**  
**SUCESIONES**

2)  $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$

3)  $3 + 5 + 7 + \dots + (2n+1) = n(n + 2)$

4)  $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$

5)  $4 + 7 + 10 + \dots + (3n + 1) = \frac{n}{2}(3n + 5)$

6)  $3 + 6 + 9 + \dots + 3n = \frac{3n}{2}(n + 1)$

7)  $1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3) = n(2n - 1)$

8)  $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2(2^n - 1)$

9)  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

10)  $2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + \dots + 2n(2n+2) = \frac{4n(n+1)(n+2)}{3}$

11)  $1 + 3 + 6 + \dots + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

12)  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

**ACTIVIDAD EN EL CUADERNO**

1.	Desarrolla las siguientes sumatorias y obtén el resultado : a) $\sum_{k=1}^5 (2k - 1) =$ b) $\sum_{k=1}^6 (k + 1)(k - 1) =$
2.	Escribe en forma de sumatoria las siguientes series : a) $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \dots$ b) $-1 + 2 - 3 + 4 - 5$ c) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 7$
3.	Calcula el valor de la siguiente suma : $\sum_{k=18}^{27} (k^3 - k) =$
4.	Calcula el valor de las siguientes sumas :



**IE DIVERSIFICADO DE CHIA**  
**DEFINICION EJERCICIOS Y EJEMPLOS DE SUSCESIONES Y LIMITES DE**  
**SUCESIONES**

	<p>a) <math>\sum_{k=1}^{36} (1 - 2k) =</math></p> <p>b) <math>\sum_{k=1}^{30} k(k - 3) =</math></p>
5.	<p>Calcula los siguientes valores :</p> <p>a) <math>\frac{30!}{28!} =</math></p> <p>b) <math>\binom{5}{3} + \binom{5}{2} =</math></p> <p>c) <math>\frac{(k+1)!}{(k-1)!} =</math></p> <p>d) <math>\binom{6}{3} + 2\binom{5}{3} - \binom{5}{2} =</math></p>
6.	<p>Compara las siguientes igualdades :</p> <p>a) <math>\frac{4!+5!+6!}{36} = 4!</math>      b) <math>\binom{9}{3} + \binom{9}{4} = \binom{10}{4} =</math>      c) <math>\binom{7}{5} : \binom{6}{4} = \binom{7}{5} =</math></p>
7.	<p>Calcula el valor de x en :</p> <p>a) <math>\binom{x}{2} = 15</math>      b) <math>\binom{x}{x-2} = 36</math></p>