SUCESIONES NUMÉRICAS

1. SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

Se llama **sucesión** a un conjunto de números dados ordenadamente de modo que se puedan numerar: primero, segundo, tercero,....

Los elementos de la sucesión se llaman **términos** y se suelen designar mediante una letra con los subíndices correspondientes a los lugares que ocupan en la sucesión: a_1, a_2, a_3, ...

Por ejemplo, son sucesiones las siguientes listas de números:

1, 2, 3, 4, 5, ...   2, 4, 8, 16, 32, ...   -3, 3, -3, 3, -3, ...

En algunas ocasiones es posible expresar el término n-ésimo (término que ocupa el lugar *n*) en función de *n.* Este término se llama **término general** de la sucesión, y se simboliza con a_n.

Por ejemplo, en la sucesión 1, 4, 9, 16, 25, ... cada término es el cuadrado del lugar que ocupa en la sucesión, con lo que el término general $a_n = n^2$.

Cuando se conoce el término general de una sucesión se puede encontrar cualquier término. Por ejemplo, en la sucesión anterior, sabemos que el décimo término es 100, el que ocupa el lugar 20 es $20^2 = 400$, el que ocupa el lugar 25 es $25^2 = 625$, ...

No todas las sucesiones tienen término general. Por ejemplo, la sucesión de los números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

En otras sucesiones, para hallar un término es necesario operar con dos o más de los anteriores y se llaman **sucesiones recurrentes**. Para hallar un término concreto hay que obtener, previamente, todos los anteriores. Por ejemplo, la **sucesión de Fibonacci** es una sucesión recurrente donde cada término se obtiene sumando los dos anteriores:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

$a_1 = 1$ $a_2 = 1$ $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$

2. PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que se pasa de cada término al siguiente sumando una cantidad fija, llamada **diferencia** de la progresión (d).

El término general, a_n, de una progresión aritmética cuyo primer término es a_1 y cuya diferencia es d se obtiene así:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

Suma de los n primeros términos de una progresión aritmética: $\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}}$

Ejemplo:

La sucesión 2, 5, 8, 11, ... es una progresión aritmética de diferencia 3. El término general lo calcularemos así:

$a_n = 2+(n-1)\cdot 3 = 2+3n-3 = 3n-1$

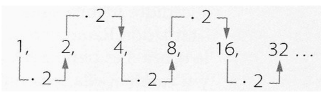
La suma de los 15 primeros términos de la progresión es: $S_{15} = \dfrac{(a_1 + a_{15})\cdot 15}{2} = \dfrac{(2+44)\cdot 15}{2} = 345$

$a_{15} = 3n-1 = 3\cdot 15 - 1 = 44$

3. PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Una progresión geométrica es una sucesión en la que se pasa de cada término al siguiente multiplicando por una cantidad fija, llamada razón de la progresión (r).

Por ejemplo, la sucesión 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... es una progresión geométrica porque:



$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \frac{32}{16} = 2$$

Es una progresión geométrica de razón r = 2.

El término general de una progresión geométrica es $\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$

Suma de n términos en una progresión geométrica (si r≠1): La suma, S_n, de n términos de una progresión geométrica de razón r, es:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1}} \quad \text{o} \quad \boxed{S_n = \frac{a_n r - a_1}{r-1}}$$

Ejemplo: Calcula la suma de los diez primeros términos de la sucesión: $-1, -2, -4, -8, \ldots$

$$S_{10} = \frac{(-1)\cdot(2^{10}-1)}{2-1} = -1023$$

Suma de infinitos términos de una progresión geométrica en la que |r| < 1:

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1-r}}$$

Por ejemplo, en la progresión 18, 6, 2, 2/3, ..., la suma de infinitos términos es:

$$r = \frac{6}{18} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow S = \frac{18}{1-\frac{1}{3}} = \frac{18}{\frac{2}{3}} = \frac{18\cdot 3}{2} = 27$$

EJERCICIOS:

1. En una progresión geométrica, $a_1=51,2$ y $a_2=40,96$. Calcula su razón y el término a_5. Escribe su término general.

2. Dada una progresión geométrica en la que $a_1=5$ y $r=1,2$.
   a) Calcula el término general.
   b) Halla la suma de los 8 primeros términos.
   c) ¿Cuántos términos de la progresión tenemos que sumar para obtener 37,208?

3. Suma todos los términos de una progresión geométrica sabiendo que el primer término es $\sqrt{3}$ y la razón es $\frac{1}{\sqrt{2}}$

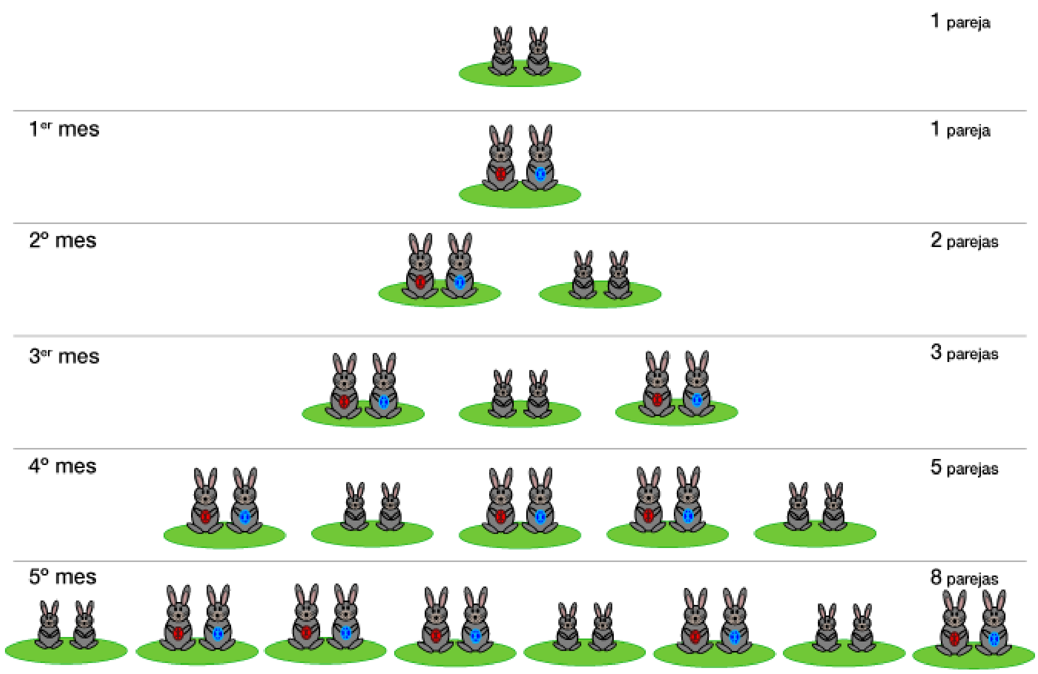
4. SUCESIÓN DE FIBONACCI

Como ya se ha dicho antes, se llama así a la sucesión en la que cada término es la suma de los dos anteriores, empezando por 1, 1:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584...

ya que 2=1+1; 3=1+2; 5=2+3; 8=3+5; 13=5+8; 21=8+13... etc.

La historia dice que Fibonacci se fijó en esta secuencia mediante la reproducción de los conejos. Planteó el siguiente problema, cuya solución es la serie anterior: *¿Cuántas parejas de conejos tendremos a fin de año, si comenzamos con una pareja que produce cada mes otra pareja que procrea a su vez a los dos meses de vida?*

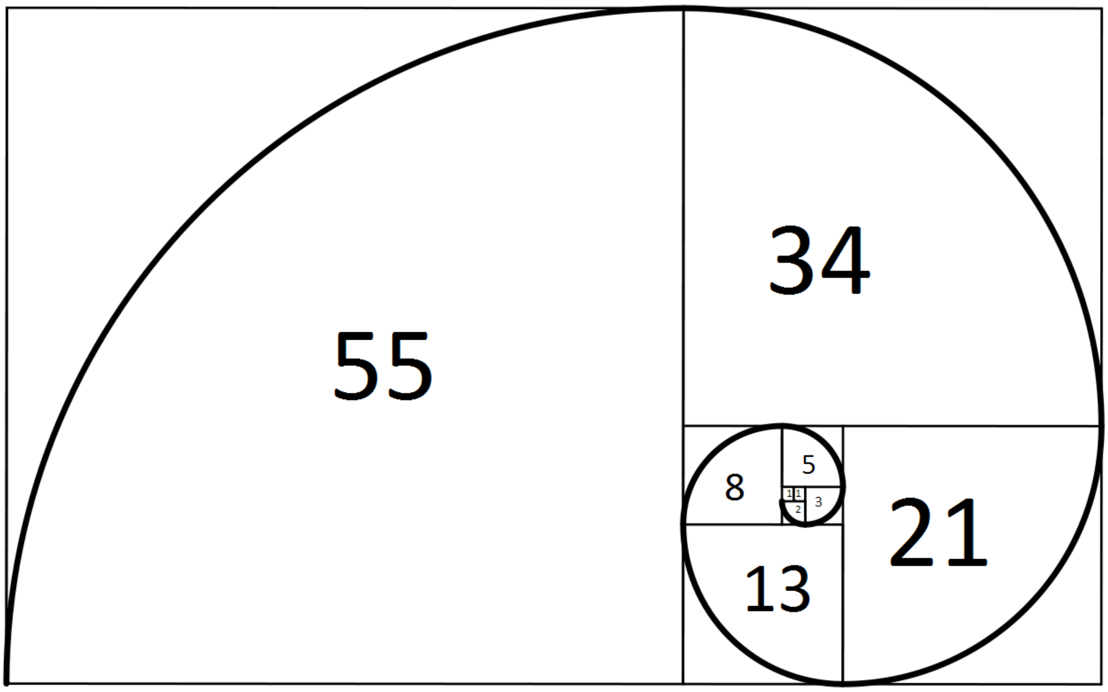


La sucesión formada por los cocientes de números consecutivos de la sucesión de Fibonacci se acerca rápidamente hacia el número de oro, 1.6180.... Los griegos y renacentistas estaban fascinados con este número y lo consideraban el ideal de la belleza.

$\frac{1}{1}=1$ $\quad \frac{2}{1}=2$ $\quad \frac{3}{2}=1,5$ $\quad \frac{5}{3}=1,\widehat{6}$ $\quad \frac{8}{5}=1,6$ $\quad \frac{13}{8}=1,625$ $\quad \frac{21}{13}=1,61538...$

$\frac{34}{21}=1,619047...$ $\quad \frac{55}{34}=1,6176...$ $\quad \frac{89}{55}=1,61818...$ $\quad \frac{144}{89}=1,61797...$ $\quad \frac{2584}{1597}=1,61803...$

La sucesión de Fibonacci aparece constantemente en la naturaleza. La podemos observar por ejemplo, contando las escamas de una piña, en las piñas del girasol, en las ramas de los árboles, en la flora de la alcachofa, en el arreglo de un cono o en la disposición de las hojas en el tallo, el número de espirales en numerosas flores y frutos, en los huracanes, algunas galaxias, las conchas tipo trilobites, en partes corporales de seres humanos y animales...



5. SUCESIONES MONÓTONAS Y ACOTADAS

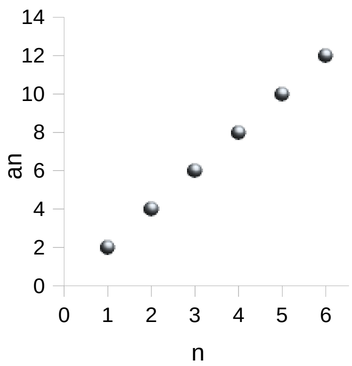
Una sucesión (a_n) es **monótona creciente** si para todo $n\geq 1$ se verifica que $a_n \leq a_{n+1}$, es decir, cada término es menor o igual que el siguiente.

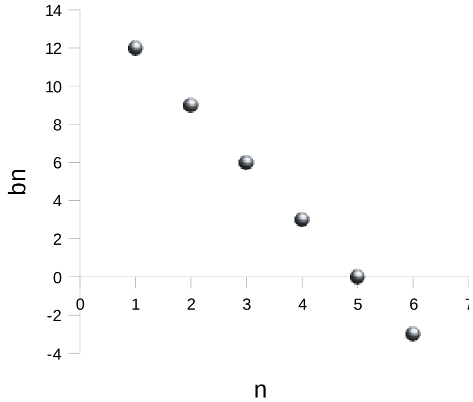
Una sucesión (a_n) es **monótona decreciente** si para todo $n\geq 1$ se verifica que $a_n \geq a_{n+1}$, es decir, cada término es mayor o igual que el siguiente.

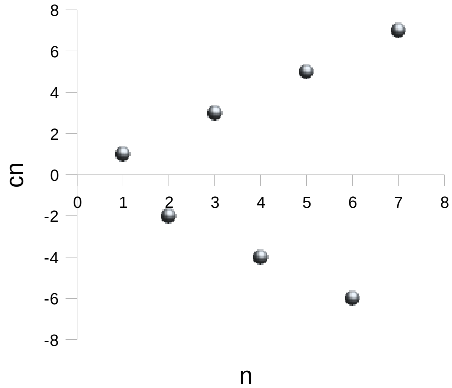
Si las desigualdades son estrictas se dice que las sucesiones son estrictamente crecientes o estrictamente decrecientes.

Por ejemplo, la sucesión $(a_n) = 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots$ es estrictamente creciente y la sucesión $(b_n)=12, 9, 6, 3, 0, -3, \ldots$ es estrictamente decreciente.

La sucesión $(c_n)=1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots$ no es monótona creciente ni decreciente.







Una **sucesión** (a_n) está **acotada superiormente** si existe un número real M tal que $a_n \leq M$ para todo n. Decimos que el número M es una **cota superior** de la sucesión.
Una **sucesión** (a_n) está **acotada inferiormente** si existe un número real M tal que $a_n \geq M$ para todo n. Decimos que el número M es una **cota inferior** de la sucesión.

Una **sucesión** (a_n) está **acotada** si lo está superior e inferiormente. En este caso, existe un número real M tal que $|a_n| \leq M$ para todo n.

En los ejemplos anteriores, la sucesión (a_n) está acotada inferiormente por 2 y (b_n) está acotada superiormente por 12.

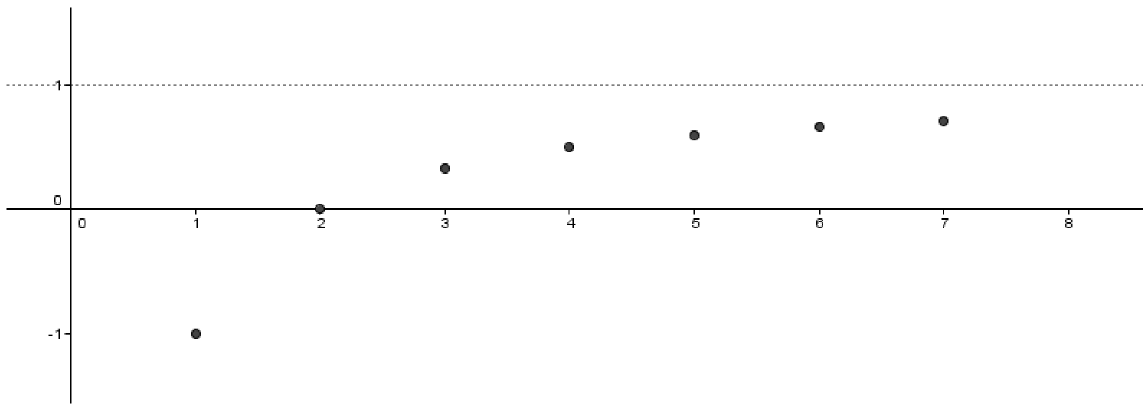
Ejemplo:

Para estudiar la monotonía de la sucesión de término general $a_n = \frac{n-2}{n}$, restamos dos términos consecutivos cualesquiera y miramos el signo:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1-2}{n+1} - \frac{n-2}{n} = \frac{n-1}{n+1} - \frac{n-2}{n} = \frac{(n-1)n-(n-2)(n+1)}{(n+1)n} = \frac{n^2-n-n^2-n+2n+2}{(n+1)n} = \frac{2}{(n+1)n}$$

$a_{n+1} - a_n = \frac{2}{(n+1)n} > 0$. Por tanto, la sucesión es estrictamente creciente.

Además, $a_n = \frac{n-2}{n} = 1 - \frac{2}{n} < 1$, con lo que es una sucesión acotada superiormente por 1.



6. LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Consideramos, por ejemplo, la sucesión de término general $a_n = \frac{4n-2}{n+1}$. Veamos cómo varían los términos de esta sucesión para números cada vez mayores:

Si sustituimos *n* por 1000, 10 000, 100 000, 1000 000 obtenemos:

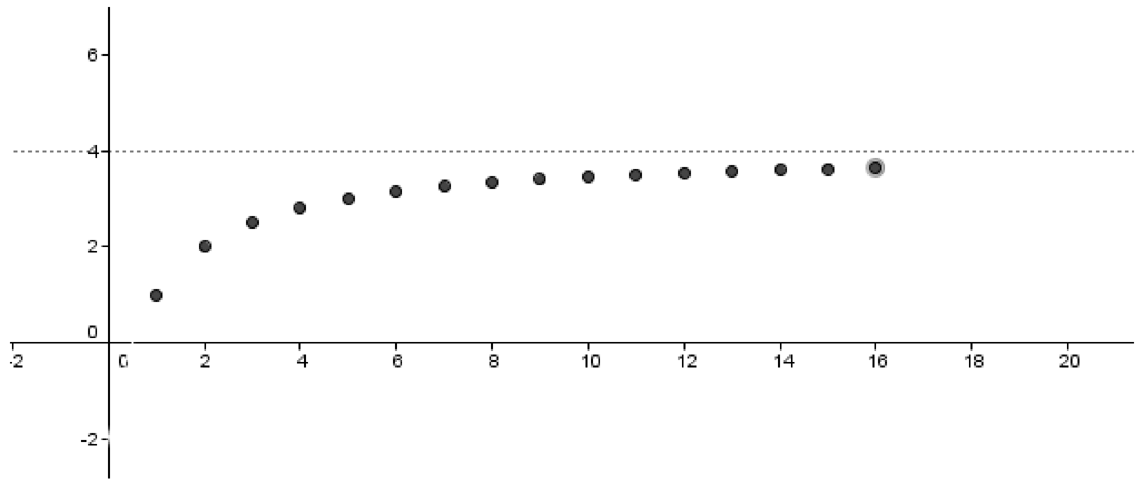
$a_{1000} = \frac{4000-2}{1001} = 3{,}994\ldots$, $a_{10\,000} = \frac{40000-2}{10001} = 3{,}9994\ldots$,

$a_{100\,000} = \frac{400000-2}{100001} = 3{,}99994\ldots$, $a_{1000\,000} = \frac{4000000-2}{1000001} = 3{,}999994\ldots$

A medida que aumenta el valor de *n*, los valores de a_n se aproximan cada vez más a 4. Decimos que 4 es el límite de la sucesión (a_n) y se escribe:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{4n-2}{n+1} = 4$$

Si representamos gráficamente la sucesión anterior, vemos que los elementos de la sucesión se acercan cada vez más a 4:



El número real L es el **límite** de una sucesión (a_n) si sus términos se aproximan cada vez más a L a medida que n toma valores cada vez más mayores. Se escribe:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

<u>Observación:</u> El límite de una sucesión, si existe, es único.

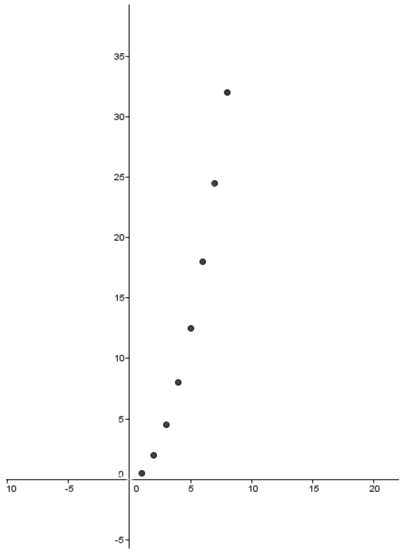
Consideremos ahora la sucesión $b_n = \frac{n^2}{2}$:

Si sustituimos *n* por 1000, 10 000, 100 000, 1000 000 obtenemos:

$b_{1000} = \dfrac{1000^2}{2} = 500000$, $b_{10000} = \dfrac{10000^2}{2} = 50000000$

$b_{100\,000} = \dfrac{100000^2}{2} = 5000000000$,

$b_{1000\,000} = \dfrac{1000000^2}{2} = 500000000000$



A medida que aumenta el valor de *n*, los valores de b_n se hacen cada vez más grandes. Esto lo expresamos así:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$$

Una **sucesión** es **convergente** si tiene como límite un número real, y será **divergente** si tiene como límite $+\infty$ o $-\infty$.

Cualquier sucesión monótona creciente y acotada superiormente tiene límite, que es la menor de sus cotas superiores. Del mismo modo, cualquier sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente tiene límite, que es la mayor de sus cotas superiores.

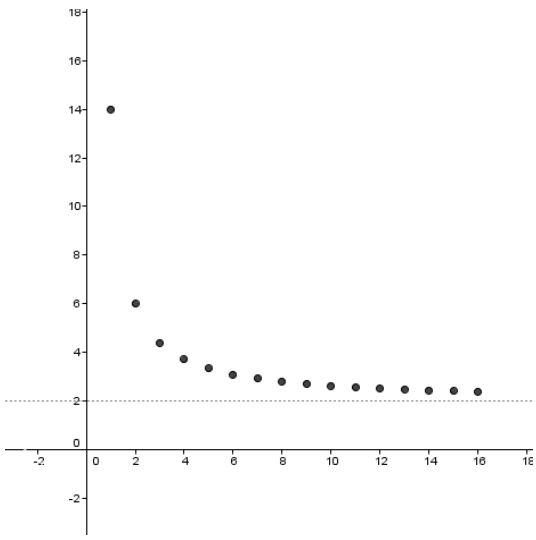
Ejemplos:

1) $a_n = \dfrac{4n+10}{2n-1}$ es una sucesión convergente, pues tiene límite 2:

$a_{100} = \dfrac{400+10}{200-1} = 2{,}0603\ldots$, $a_{1000} = \dfrac{4000+10}{2000-1} = 2{,}006003\ldots$

$a_{10000} = \dfrac{40000+10}{20000-1} = 2{,}00060003\ldots$

$a_{100000} = \dfrac{400000+10}{200000-1} = 2{,}0000600003\ldots$



Así sucesivamente, podemos observar que los términos de la sucesión se aproximan cada vez más a 2, cuanto mayor es el valor de n. Es decir, $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

Se puede calcular el límite de la sucesión anterior dividiendo todo entre n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n+10}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n}{n}+\frac{10}{n}}{\frac{2n}{n}-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{10}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{4}{2} = 2$$

Si el numerador y denominador son del mismo grado, el límite es igual al cociente entre los términos de mayor grado: $\frac{4n}{2n}=2$.

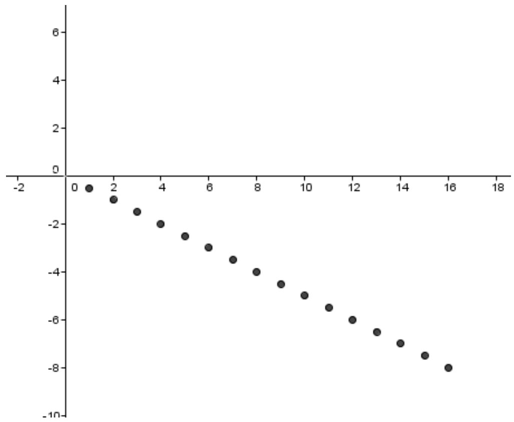
2) $b_n=\frac{-n}{2}$ es una sucesión divergente, pues $\lim_{n\to\infty} b_n=-\infty$:

$b_{1000}=\frac{-1000}{2}=-500$, $b_{10000}=\frac{-10000}{2}=-5000$

$b_{100000}=\frac{-100000}{2}=-50000$

$b_{1000000}=\frac{-1000000}{2}=-500000$

$b_{10000000}=\frac{-10000000}{2}=-5000000$



Si el numerador es de mayor grado que el denominador, el límite es ∞ o -∞, según los signos de los coeficientes principales.

Si el numerador es de menor grado que el denominador, el límite es cero.

Las sucesiones que no tienen límite se llaman **sucesiones oscilantes**. Pueden darse dos casos:

- Si la sucesión no tiene límite y es acotada, entonces la sucesión tiene oscilación finita. Por ejemplo, 1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, ...
- Si la sucesión no tiene límite y no es acotada, entonces la sucesión tiene oscilación infinita. Por ejemplo, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, ...

7. EL NÚMERO "e"

Consideremos la sucesión de término general $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Sus primeros términos son:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1,\left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\left(1+\frac{1}{3}\right)^3,\left(1+\frac{1}{4}\right)^4,...,\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100},...$$

Realizando esos cálculos obtenemos: 2; 2,25; 2,37037...; 2,441406...; ...; 2,70481...

Se trata de una sucesión creciente y acotada superiormente, porque todos los términos son menores que 3. Vamos a calcular más términos, pero para valores de n cada vez más grandes:

$$a_{10000}=\left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000}=2,7181459\ldots \qquad a_{100000}=\left(1+\frac{1}{100000}\right)^{100000}=2,718268\ldots$$

$$a_{1000000}=\left(1+\frac{1}{1000000}\right)^{1000000}=2,7182804\ldots \qquad a_{10000000}=\left(1+\frac{1}{10000000}\right)^{10000000}=2,7182816\ldots$$

$$a_{1000000000}=\left(1+\frac{1}{1000000000}\right)^{1000000000}=2,718281827\ldots$$

$$a_{1000000000000}=\left(1+\frac{1}{1000000000000}\right)^{1000000000000}=2,718281828\ldots$$

Como vemos, los términos muy avanzados se aproximan al mismo número, el número *e.* Por tanto, se define el número *e* como:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e}$$

Hay sucesiones similares a la anterior cuyos límites están relacionados con el número *e*. Son todas aquellas sucesiones de potencias en las que la base tiende a 1 y el exponente a ∞. Por ejemplo:

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{3n+7}\right)^{4n-5}=1^{\infty}$, que no sabemos exactamente a qué equivale.

Para calcular el límite transformaremos la sucesión anterior en otra similar a $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$.

Sumamos y restamos 1 de la siguiente forma:

$$\left(\frac{3n-2}{3n+7}\right)^{4n-5}=\left(1+\frac{3n-2}{3n+7}-1\right)^{4n-5}=\left(1+\frac{3n-2-3n-7}{3n+7}\right)^{4n-5}=\left(1+\frac{-9}{3n+7}\right)^{4n-5}$$

Dividimos numerador y denominador de la fracción entre -9 y a continuación transformamos el exponente para que nos quede idéntico al denominador:

$$\left(1+\frac{-9}{3n+7}\right)^{4n-5}=\left(1+\frac{1}{\frac{3n+7}{-9}}\right)^{4n-5}=\left(1+\frac{1}{\frac{3n+7}{-9}}\right)^{\frac{3n+7}{-9}\cdot\frac{-9}{3n+7}\cdot(4n-5)}=\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3n+7}{-9}}\right)^{\frac{3n+7}{-9}}\right]^{\frac{-9}{3n+7}\cdot(4n-5)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{3n+7}\right)^{4n-5}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3n+7}{-9}}\right)^{\frac{3n+7}{-9}}\right]^{\frac{-9}{3n+7}\cdot(4n-5)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-9}{3n+7}\cdot(4n-5)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-36n+45}{3n+7}}=e^{-12}$$

EJERCICIOS

1. Di el criterio por el que se forman las sucesiones siguientes y añade dos términos a cada una:
   a) 3, 8, 13, 18, 23, ...
   b) 1, 8, 27, 64, 125, ...
   c) 1, 10, 100, 1 000, 10 000, ...
   d) 8; 4; 2; 1; 0,5; ...
   e) 1, 3, 4, 7, 11, 18, ...
   f) 8, 3, 5, –2, 7, –9, ...
   g) 1, –2, 3, – 4, 5, – 6, ...
   h) 20, 13, 6, –1, – 8, ...

2. Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones:
   a) $a_n = 3n^2 + 3$
   b) $b_n = \dfrac{2n-1}{n+3}$
   c) $c_1 = 1,\ c_n = 2c_{n-1} + 4$
   d) $d_1 = 2,\ d_2 = 5,\ d_n = 3d_{n-1} + 2d_{n-2}$

3. El quinto término de una progresión geométrica es 48 y el primero es 3. Halla los cinco primeros términos de dicha progresión.

4. Forma una sucesión recurrente, a_n, con estos datos: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$.

5. ¿Cuáles de las siguientes sucesiones son progresiones geométricas? En cada una de ellas di su razón y añade dos términos más:
   a) 1, 3, 9, 27, 81, ...
   b) 100; 50; 25; 12,5; ...
   c) 12, 12, 12, 12, ...
   d) 5, –5, 5, –5, 5, –5, ...
   e) 90, –30, 10, –10/3, 10/9, ...

6. Calcula la suma de los 20 primeros términos de cada una de las progresiones geométricas del ejercicio anterior. ¿En cuáles de ellas puedes calcular la suma de sus infinitos términos? Hállala.

7. Halla el término general de las siguientes sucesiones:
   a) 1, 3/4, 5/9, 7/16, ...
   b) 2, 5, 10, 17, 26, ...
   c) 10, 26, 50, 82, ...
   d) -1/2, 1/5, 3/8, 5/11, ...
   e) -2, 4, -8, 16, ...

8. Halla los tres primeros números de una progresión aritmética sabiendo que su suma es 6 y la suma de sus cuadrados es $\dfrac{158}{9}$.

   (Soluc: 1/3, 2, 11/3 o 11/3, 2, 1/3)

9. Se deja caer una bola de goma desde la azotea de un edificio que tiene una altura de 243 m. Cada vez que toca el suelo, rebota y recorre hacia arriba una distancia igual a las dos terceras partes de la altura desde la que ha caído la última vez. ¿De qué altura ha caído la bola cuando ha tocado el suelo por sexta vez?

   (Soluc: 32 m)

10. Un concurso de televisión consiste en proponer al concursante una sucesión de preguntas hasta que dé una respuesta incorrecta y quede eliminado. Los premios de cada respuesta se acumulan y son de un euro por la primera, dos por la segunda, cuatro por la tercera y así sucesivamente.
a) Si se responden diez preguntas correctamente, ¿cuánto dinero se consigue?
b) ¿Cuál es el mínimo número de preguntas que hay que responder para conseguir 6000 €?
(Soluc: a) 1023 €, b) 13 preguntas)

11. Se hace un depósito de 5000 € en un banco que paga un interés del 4% anual. ¿Cuántos años se ha de dejar para superar los 8000 €? (Soluc: 12 años)

12. La maquinaria de una fábrica pierde cada año un 20% de su valor. Si costó 4 millones de euros, ¿en cuánto se valorará después de 10 años de funcionamiento?
(Soluc: 429 496,73 €)

13. En un cine, la segunda fila de butacas está a 10 m de la pantalla y la séptima fila está a 16 m. ¿En qué fila debe sentarse una persona que le guste ver la pantalla a una distancia de 28 m? (Soluc: Fila 17)

14. La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es igual a 4 y $a_2 = 1$. Calcula a_1 y la razón. (Soluc: $a_1=2$, $r=1/2$)

15. El 1 de enero depositamos 5 000€ en una cuenta bancaria a un interés anual del 6% con pago mensual de intereses. ¿Cuál será el valor de nuestro dinero un año después?
(Soluc: 5308,39 €)

16. Averigua cuál es la diferencia en valor absoluto entre el límite de la sucesión de término general $a_n=\frac{3n+1}{n+1}$ y el valor de a_{10000}.

17. Representa la sucesión $a_n=(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$ y di de qué tipo es. ¿Tiene límite?

18. Representa la sucesión $b_n=(-1)^n\cdot n$ y describe su comportamiento. ¿Tiene límite?

19. Representa la sucesión $c_n=\frac{n^2}{4}-2n+3$ y asigna un valor a su límite.

20. Calcula el límite de las sucesiones siguientes, y di de qué tipo son: $a_n = \frac{n^2+3}{n+2}$, $b_n = \frac{2n^2+3n}{7n^2-2}$, $c_n = \frac{3}{n^3+2}$, $d_n = \frac{-n^2+3}{n+4}$.

21. Calcula el límite de las sucesiones siguientes, y di de qué tipo son:

a) $a_n = \frac{n^2+2}{3n^2}$ b) $a_n = \frac{2n+2}{3(n+1)}$

c) $a_n = \frac{7}{5^n}$ d) $a_n = 4 + \frac{n+2}{n-3}$

22. Calcula el límite de las siguientes sucesiones, si es que lo tienen:

a) $a_n = \frac{5n^3+2n}{n-6}$ c) $a_n = 2 + \frac{7}{5^n}$

b) $a_n = \frac{1-2n}{1+2n}$ d) $a_n = 6 + \frac{5n+2}{2n-3}$

23. Calcula el límite de las siguientes sucesiones, si es que lo tienen:

a) $a_n = \left(\frac{5n^3+2n}{5n^3-6}\right)^{2n}$ b) $a_n = \left(\frac{3+2n}{5+2n}\right)^{3n+2}$ c) $a_n = \left(1 + \frac{7}{n+3}\right)^{n^2}$ d) $a_n = \left(\frac{2n+2}{2n-3}\right)^{\frac{n^3+1}{n}}$

24. Estudia la monotonía de la sucesión de término general $a_n = \frac{2n+1}{n-1}$.

25. Prueba que la sucesión del ejercicio anterior es acotada.

26. Halla, cuando exista, una cota superior de cada una de las sucesiones siguientes. Indica qué tipo son:

a) $a_n = \frac{-3n}{n^2+1}$ b) $b_n = 2n+3$ c) $c_n = \frac{6-2n}{3n}$ d) $d_n = (-2)^n$

27. Estudia la monotonía y acotación de la sucesión de término general $a_n = \frac{3n^2-2n}{n^2+3}$.

28. Halla el término general de cada una de las siguientes sucesiones:

a) $\frac{11}{3}, \frac{8}{7}, \frac{5}{11}, \frac{2}{15}, \ldots$ b) $\frac{3}{7}, \frac{-11}{7}, \frac{-25}{7}, \frac{-39}{7}, \ldots$ c) $-2, 5, \frac{10}{3}, \frac{17}{5}, \ldots$

29. Calcula el límite de las siguientes sucesiones e indica de qué tipo son:

a) $a_n = \frac{8n-n^2}{2n^2-100}$ b) $b_n = \frac{n\cdot(-1)^n}{3n+1}$ c) $c_n = \frac{5n+7}{2n-1}$ d) $d_n = \frac{(-1)n^2+4}{n+2}$

30. Calcula el límite de las siguientes sucesiones:

a) $a_n=\left(\dfrac{2n^3+2n}{2n^3-6}\right)^{2n+1}$ b) $a_n=\left(\dfrac{5n^7-4}{5n^7-6n}\right)^{n-2}$ c) $a_n=\left(\dfrac{3n+2}{3n+8}\right)^{\frac{n^2+3}{n-1}}$

31. Calcula el límite de las siguientes sucesiones:

a) $a_n=\left(\dfrac{n^2+2n}{n^2-6}\right)^{2n-3}$ b) $a_n=\left(\dfrac{n^2-4}{n^2-6n}\right)^{n-2}$ c) $a_n=\left(\dfrac{n+2}{n-5}\right)^{\frac{2n^2+3}{3n-1}}$

32. Construye dos sucesiones cuyas leyes de recurrencias sean las siguientes:

a) $a_1=0$ $a_2=2$ $a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$ b) $a_1=1$ $a_2=2$ $a_n=\dfrac{a_{n-1}\cdot a_{n-2}}{2}$

33. Busca una ley de recurrencia para definir las siguientes sucesiones:

a) 4, 7, 3, -4, -7, ... b) $2,3,\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\ldots$

34. Calcula la suma de todos los términos comprendidos entre el 10 y el 20, ambos inclusive, de estas sucesiones dadas por recurrencia:

a) $a_1=20$, $a_n=a_{n-1}+4$ b) $b_1=7$, $b_2=13$, $b_n=b_{n-2}+12$

c) $c_1=0{,}625$; $c_n=2c_{n-1}$ d) $d_1=4$, $d_2=6$, $d_n=d_{n-2}\cdot\dfrac{9}{4}$

35. En una progresión aritmética sabemos que $d=3$, $a_k=34$ y $S_k=133$. Calcula k y a_1.

36. Sea (a_n) una progresión aritmética con $d>0$. ¿Cuál es su límite?

37. ¿Cuánto vale la suma de los 100 primeros múltiplos de 7?

38. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n=\dfrac{\sqrt{2n^5+2n}}{2n^3-6}$ b) $a_n=\dfrac{5n^7-4}{\sqrt{n^2-6n}}$ c) $a_n=\dfrac{\sqrt{n^{12}+2n^2}}{3n^{10}+8n}$ d) $a_n=\dfrac{\sqrt{n^2-3}}{n+7}$

39. Carmen está preparando el examen de reválida. Para no dejar toda la materia para el final ha decidido estudiar cada día el doble de páginas que el día anterior. Si el primer día estudió dos páginas, ¿cuántas habrá estudiado al cabo de 8 días?