

Sucesiones de 2do Orden

Estos conceptos y ejemplos son bajados de internet para desarrollar de mejor forma el proceso que debemos realizar para encontrar los valores de las sucesiones cuando debemos hallar el termino enésimo de la sucesión.

Función Sucesión

PARA UN BUEN INICIO

De las siguientes expresiones, ¿cuáles son funciones?

1. $y = 3x - 8$

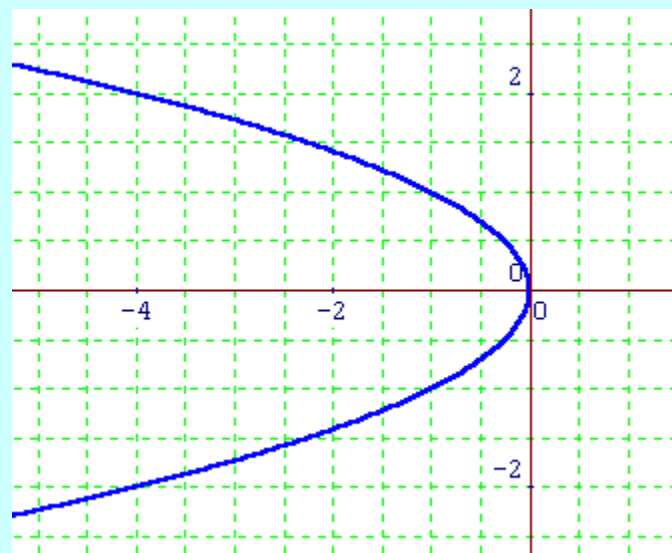
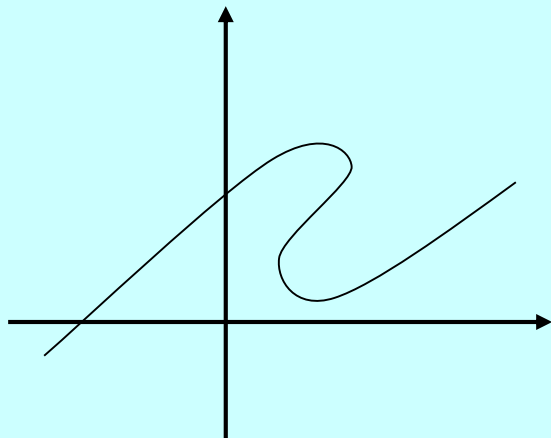
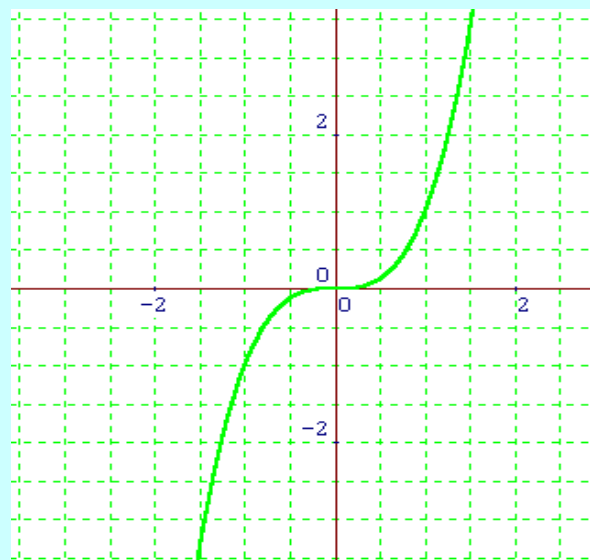
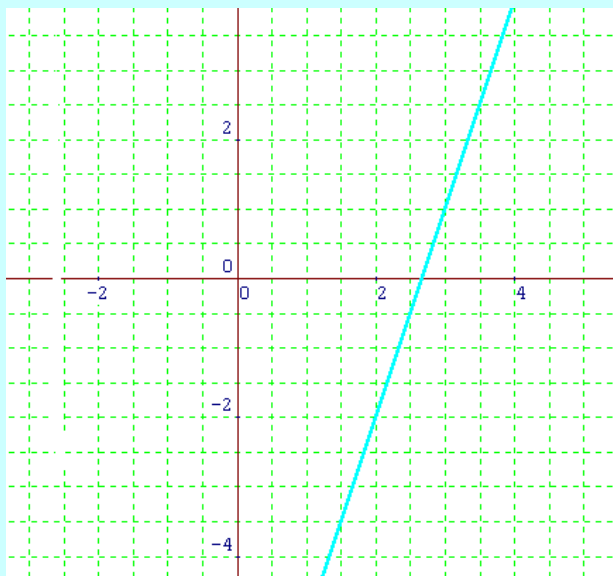
2. $y = x^3$

3. $x^2 + y^2 = 4$

4. $x \cdot y = -1$

Observación: Esto constituye el recojo de saberes previos

De los gráficos siguientes. ¿Qué gráficos son funciones?



Función Sucesión

Una sucesión es una función variable entera positiva; es decir,

$$f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

El término general es:

$$y = f(n) = a_n$$

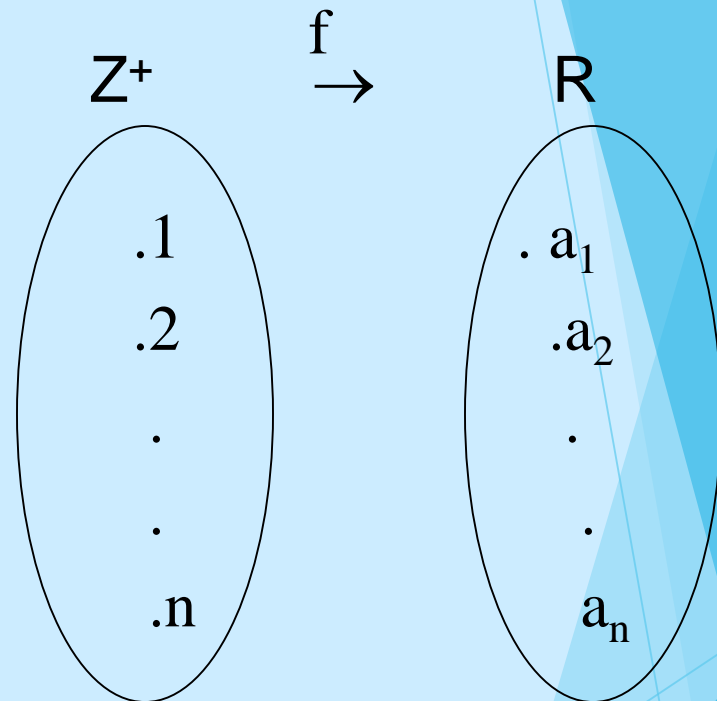
$$n = 1 \rightarrow f(1) = a_1$$

$$n = 2 \rightarrow f(2) = a_2$$

$$n = 3 \rightarrow f(3) = a_3$$

⋮

$$n \rightarrow f(n) = a_n$$



$$D(f) = \mathbb{Z}^+ ; R(f) \subseteq \mathbb{R}$$

Una sucesión es un conjunto ordenado de infinitos números reales.

$$\text{Así: } f = \{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$$

Ejemplo

Si $a_n = n(n^2 - 1)$, calcular el valor de: $P = a_1 - a_2 + a_3 - a_4$ (**)

Hallamos el valor de cada término en: $a_n = n(n^2 - 1)$,

$$a_1 = 1(1^2 - 1) = 1(1 - 1) = 0$$

$$a_2 = 2(2^2 - 1) = 2(4 - 1) = 6$$

$$a_3 = 3(3^2 - 1) = 3(9 - 1) = 24$$

$$a_4 = 4(4^2 - 1) = 4(16 - 1) = 60$$

Calculamos el valor de P, en (**): $P = 0 - 6 + 24 - 60 = -42$

Luego el valor de P es: -42

Sucesiones definidas por recurrencia

Las sucesiones en las que cada término se obtiene del anterior término o de los anteriores, mediante un cálculo, se llaman **sucesiones por recurrencia**.

Ejemplo:

Si $a_1 = 0$; $a_2 = 1$ y $a_n = 3a_{n-2} - a_{n-1}$ Calcular 6 términos.

Resolvemos:

$$a_3 = 3a_1 - a_2 = 3(0) - 1 = -1$$

$$a_4 = 3a_2 - a_3 = 3(1) - (-1) = 4$$

$$a_5 = 3a_3 - a_4 = 3(-1) - 4 = -7$$

$$a_6 = 3a_4 - a_5 = 3(4) - (-7) = 19$$

Escribimos ahora el conjunto solución:

Luego:

$$\{a_n\} = \{0; 1; -1; 4; -7; 19\}$$

PROGRESIÓN ARITMÉTICA DE PRIMER ORDEN

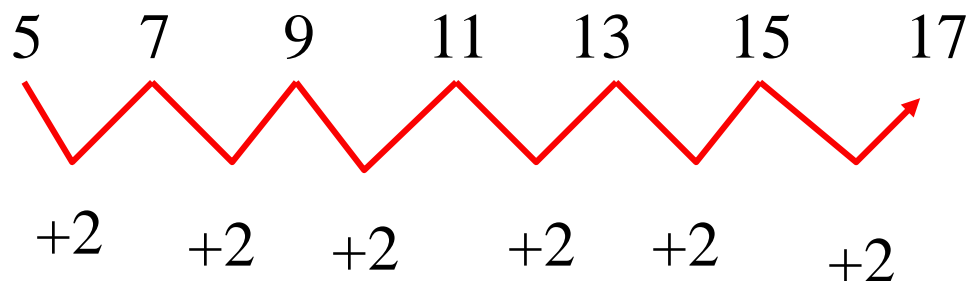
Consideremos la sucesión de término general: $a_n = 2n + 3$

$$\{a_n\} = \{5; 7; 9; 11; 13; 15; 17, \dots\}$$

La característica principal, es que cada término de esta sucesión es igual al anterior más 2.

Una **Progresión Aritmética**, es una sucesión de números reales tales que cada término es igual al anterior más un número constante, llamado razón o diferencia.

Ejemplo:



El 1er término: $a_1 = 5$

Razón : $r = 2$

Número de términos: 7

Término general:

$$a_n = 2n + 3$$

TÉRMINO GENERAL:

$$\begin{aligned} a_1 & \rightarrow \text{1er. término} \\ a_2 = a_1 + d & \rightarrow \text{2do término} \\ a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d & \rightarrow \text{3er. término} \\ a_4 = a_3 + d = a_2 + d + d = a_1 + 3d & \rightarrow \text{4to. término} \\ \\ a_n = a_1 + (n - 1) d & \rightarrow \text{término general} \end{aligned}$$

De la expresión anterior hallamos:

$$a_1 = a_n - (n - 1) d$$

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$$

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

Sugerencia: Es necesario tener en cuenta la importancia que el estudiante maneje con mucha destreza las expresiones anteriores

Ejemplo:

¿La fórmula $a_n = 5n$, define una progresión aritmética?

Solución:

Hallamos los primeros términos (por ejemplo los 6 primeros), en la expresión: $a_n = 5n$, cuyos resultados son:

$$a_1 = 5(1) = 5 \quad ; \quad a_2 = 5(2) = 10 \quad ; \quad a_3 = 5(3) = 15 \quad \dots$$

1er ter 2do ter 3er ter

$$\{a_n\} = \{5 ; 10 ; 15 ; 20 ; 25 ; 30 \}.$$

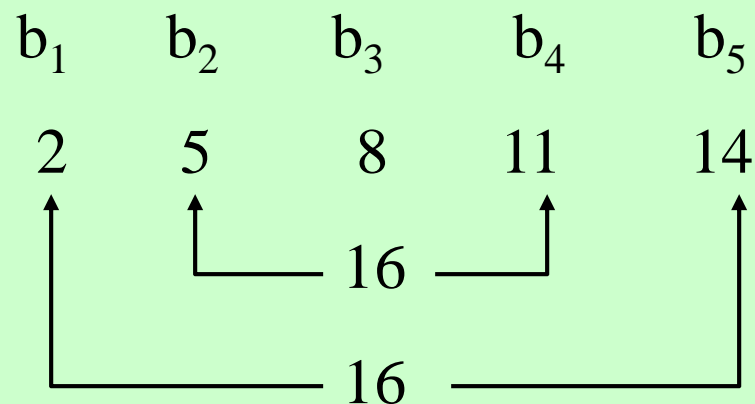
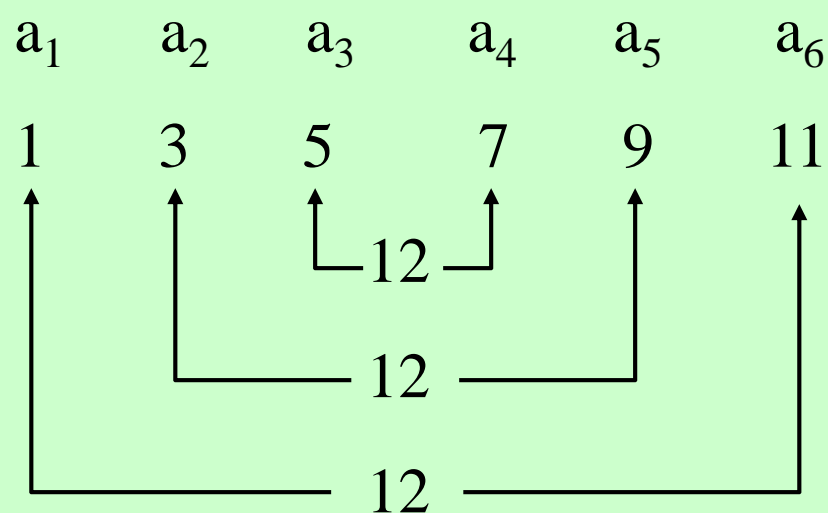
Observamos que cada término posterior al primero es igual al anterior más una constante, $d = 5$ (razón o diferencia).

Por lo tanto, afirmamos que $a_n = 5n$, sí define una Progresión aritmética.

Suma de los términos equidistantes de los extremos

$$\{a_n\} = \{1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11\}$$

$$\{b_n\} = \{2 ; 5 ; 8 ; 11 ; 14\}$$



De donde: $a_1 + a_6 = a_2 + a_5 = a_3 + a_4 = 12$

$$b_1 + b_5 = b_2 + b_4 = 2b_3 = 16$$

En general se cumple: $a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} \dots = a_1 + a_n$

Suma de los n términos de Progresión Aritmética

La suma de los términos de una P.A, la denotamos por S_n . Para hallar la expresión de la suma hacemos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$$

$$2 S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

En el segundo miembro existe “n” paréntesis y cada uno de ellos es igual a:

$$(a_1 + a_n).$$

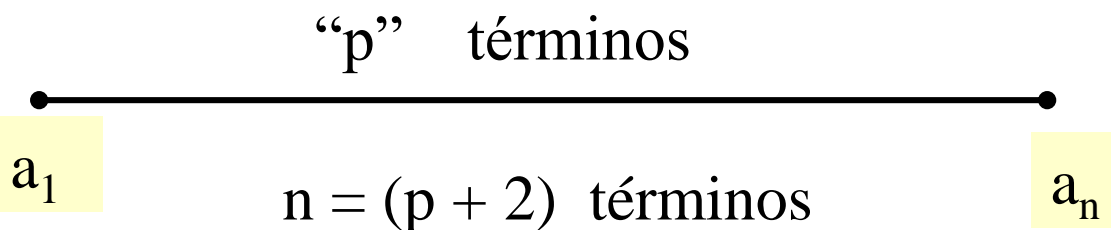
Por lo tanto: $2 S_n = (a_1 + a_n) n.$

De donde:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Interpolación de medios aritméticos

Interpolación “p” términos entre dos números a_1 y a_n es intercalar “p” números entre a_1 y a_n de modo que formen una P.A.



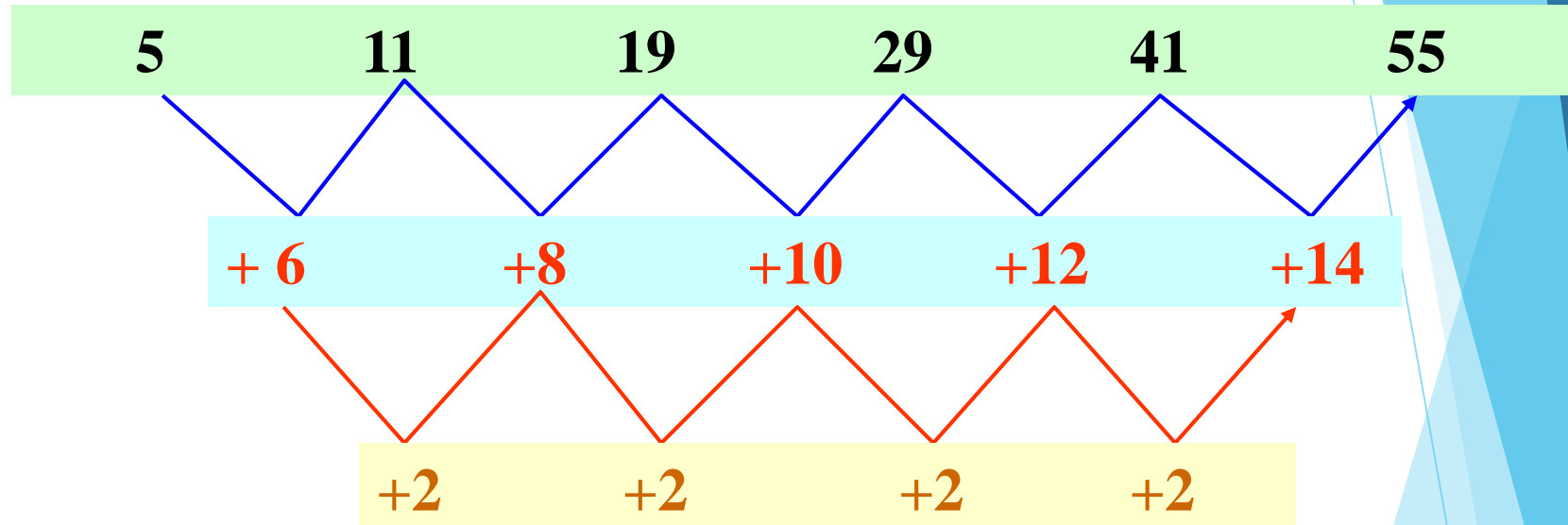
Para resolver problemas de éste tipo, es suficiente hallar la razón “d” de la P.A. que tiene por extremos a_1 y a_n cuyo número de términos es “p + 2”.

Para lo cual usamos:

$$a_n = a_1 + (p + 2 - 1)d \Rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{p + 1}$$

PROGRESIÓN ARITMÉTICA DE 2DO ORDEN

Consideremos la sucesión: $\{a_n\} = \{5 ; 11 ; 19 ; 29 ; 41 ; 55 ; \dots\}$

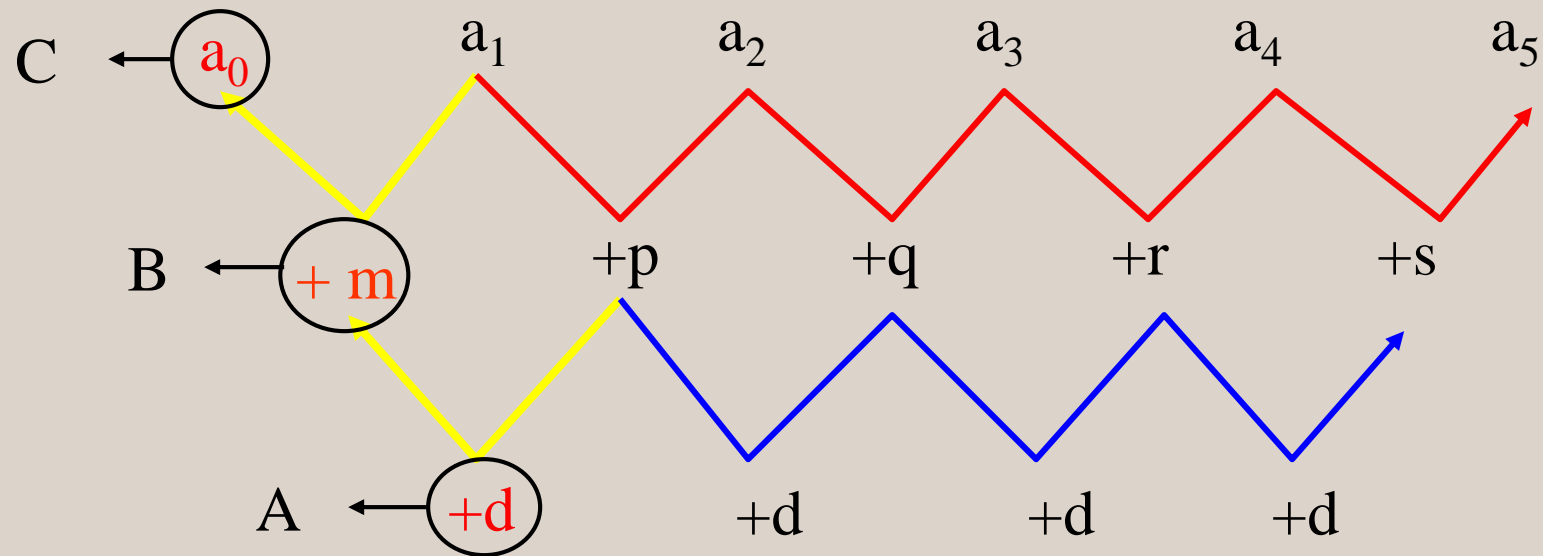


La última fila (2da) representa la característica de una progresión aritmética de 2do orden.

Término General:

Para hallar el término general, primero se halla el término (a_0) anterior al primer término y luego se aplica la fórmula (**).

Sea la sucesión: $\{a_n\} = \{a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4 ; a_5 ; \dots\}$

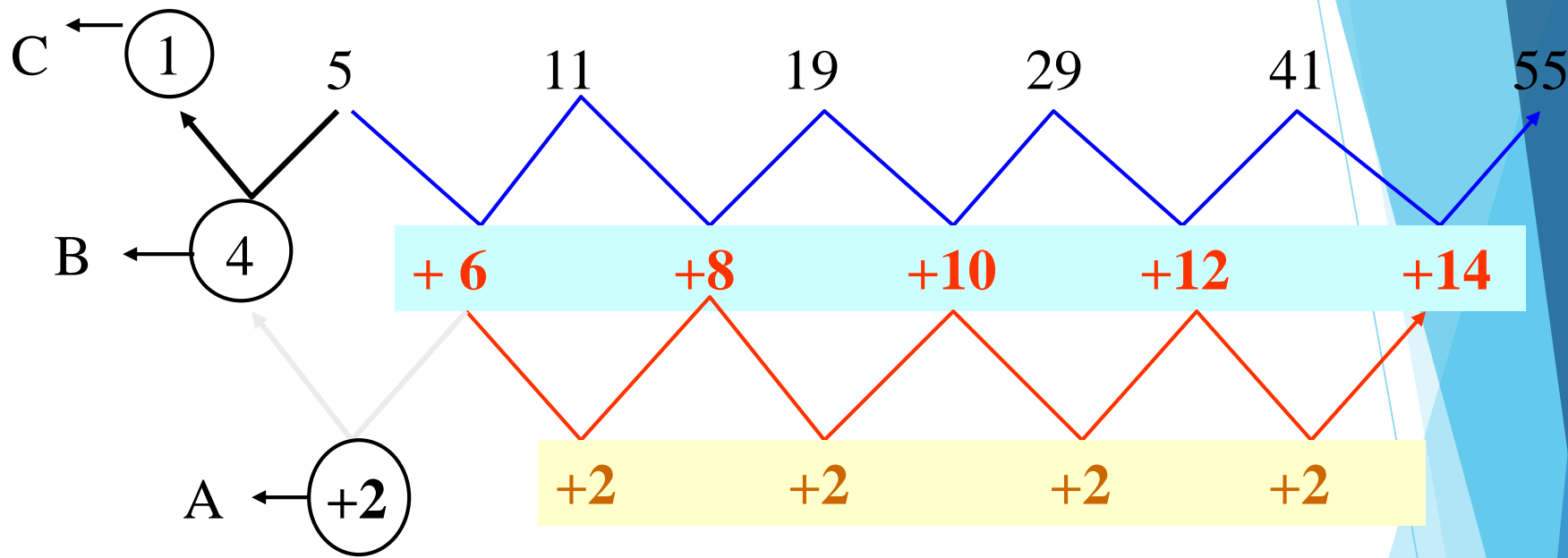


De donde:

$$a_n = \left(\frac{A}{2}\right) \cdot n^2 + \left(B - \frac{A}{2}\right) \cdot n + C \quad (**)$$

Ejemplo:

Hallar el término general de: $\{a_n\} = \{5 ; 11 ; 19 ; 29 ; 41 ; 55 ; \dots\}$



De modo
que:

$$a_n = \left(\frac{A}{2}\right) \cdot n^2 + \left(B - \frac{A}{2}\right) \cdot n + C = \left(\frac{2}{2}\right) \cdot n^2 + \left(4 - \frac{2}{2}\right) \cdot n + 1$$

Por tanto el término general es:

$$a_n = n^2 + 2n + 1$$